回文數書面報告

1. 什麼是回文數

回文數是指前後對稱的數字，無論從左到右閱讀還是從右到左閱讀，都會得到相同的數字。例如：9、33、191、4774、12321 等。無論使用何種進位制度，都有無窮多個回文數。回文數在數學與計算中具有重要的研究價值，特別是在對稱性和數字特性的分析上。

2. 回文數的歷史資料

中國最早記錄回文數的書籍是宋代的《注解九章演算法》，由楊輝著作，年份為1261 年。文中還提到了依據資料來源於賈憲的算法。此外，中國的賈憲三角形，在歐洲被稱為帕斯卡三角形。這表明中國數學家在數字對稱性與結構研究方面的先驅地位。

3. 回文數的觀察與規律

原數	平方	原數	平方	原數	平方	原數	平方
11	121	2002	4008004	30693	942060249	1042151	1086078706801
22	484	2285	5221225	100001	10000200001	1100011	1210024200121
26	676	2636	6948496	101101	10221412201	1101011	1212225222121
101	10201	10001	100020001	110011	12102420121	1102011	1214428244121
111	12321	10101	102030201	111111	12345654321	1109111	1230127210321
121	14641	10201	104060401	200002	40000800004	1110111	1232346432321
202	40804	11011	121242121	798644	637832238736	1111111	1234567654321
212	44944	11111	123454321	1000001	1000002000001	1270869	1615108015161
264	69696	11211	125686521	1001001	1002003002001	2000002	4000008000004
307	94249	20002	400080004	1002001	1004006004001	2001002	4004009004004
836	698896	20102	404090404	1010101	1020304030201	2012748	4051154511504
1001	1002001	22865	522808225	1011101	1022325232201	2294675	5265533355625
1111	1234321	24846	617323716	1012101	1024348434201	3069307	9420645460249

1. **無進位回文數規律：** 為了對回文數進行分析，可以使用公式進行模擬計算。 這些公式揭示了回文數的構成和內在的代數性質，並可推廣至不同進位制度。
2. **進位回文數：** 通過定義，進位回文數的對應計算方法反映在遞歸公式中。這種模式展示了進階回文數的生成邏輯，並為後續研究提供了框架。

• 未進位之回文數規律討論

I、

$a_1: 11^2 = 121 = 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$

$a_2: 101^2 = 10201 = 10^4 + 2 \cdot 10^2 + 1$

$a_3: 1001^2 = 1002001 = 10^6 + 2 \cdot 10^3 + 1$

公式$:(10^n + 1)^2 = (10^{2n} + 1) + 2(10^n)$

證明:

$(10^n + 1)^2 = C_2^2 10^{2n} + C_1^2 10^n \cdot 1 + C_0^2 1^2 = (10^{2n} + 1) + 2 \cdot 10^n$

II、

$a_1: 22^2 = 484 = 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4$

$a_2: 202^2 = 40804 = 4 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^2 + 4$

$a_3: 2002^2 = 4008004 = 4 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^3 + 4$

公式$:[2 \cdot (10^n + 1)]^2 = 4(10^{2n} + 1) + 8(10^n)$

證明:

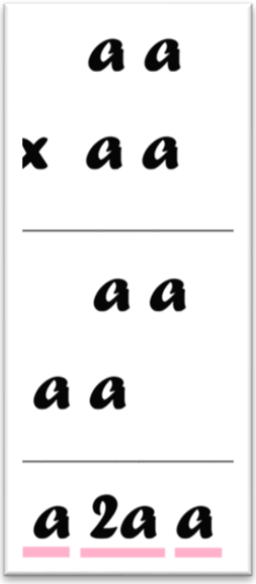
$[2 \cdot (10^n + 1)]^2 = 4 \cdot C_2^2 10^{2n} + 4 \cdot C_1^2 10^n \cdot 1 + C_0^2 1^2 = 4(10^{2n} + 1) + 8 \cdot 10^n$

統整 I、II 的公式，可知此規律的通式為:

$$[k(10^n + 1)]^2 = k^2(10^{2n} + 1) + 2 \cdot k^2 \cdot 10^n$$

由 I、II 可知，將 I 原數乘上 2，展開後結果會為 2^2倍，而原數乘上 3，展開後結果則會打破 I、II 的規律。以原數 11 為例，將原數乘上 2 後，展開後結果為$(11 \cdot 2)^2 = [2\,(10 + 1)]^2 = 4(10^2 + 1) + 2 \cdot 4 \cdot 10 = 484$，$22^2$為平方回

文數；若將原數乘上 3，展開後結果為$(11\cdot 3)^2=[3(10+1)]^2=9(10^2+1)+2\cdot 9\cdot 10=909+180=1089$，$33^2$不是回文數。由上述例子可知，若各個位數平方後之總和≥10，即打破回文數之規則。



圖（四）
（圖片來源:自製）

III、

$111^2=12321$

$10101^2=102030201$

$1001001^2=1002003002001$

公式: $(10^{2n}+10^n+1)^2=(10^{4n}+1)+2\cdot 10^n(10^{2n}+1)+3\cdot 10^{2n}$

證明:

$(10^{2n}+10^n+1)^2$

$=[(10^{2n})+(10^n+1)]^2$

$=C_0^2 10^{4n}+C_1^2(10^{2n})(10^n+1)+C_2^2(10^n+1)^2$

$=C_0^2 10^{4n}+C_1^2 10^{3n}+C_1^2 10^{2n}+C_2^2[C_0^2\cdot 10^{2n}+C_1^2 2\cdot 10^n+C_2^2\cdot 1^2]$
$=C_0^2 10^{4n}+C_1^2 10^{3n}+C_1^2 10^{2n}+C_2^2 C_0^2 10^{2n}+C_2^2 C_1^2 10^n\cdot 1+C_2^2 C_2^2 1^2$

$=10^{4n}+2\cdot 10^{3n}+3\cdot 10^{2n}+2\cdot 10^n+1$

$=(10^{4n}+1)+2\cdot 10^n\cdot(10^{2n}+1)+3\cdot 10^{2n}$

IV、

$a_1: 121^2 = 14641$

$a_2: 10201^2 = 104060401$

$a_3: 1002001^2 = 1004006004001$

公式: $(10^{2n} + 2 \cdot 10^n + 1)^2 = (10^{4n} + 1) + 4 \cdot 10^n(10^{2n} + 1) + 6 \cdot 10^{2n}$

證明:

$(10^{2n} + 10^n + 1)^2$

$= [10^{2n} + (10^n + 1)]^2$

$= C_0^2 10^{4n} + C_1^2(10^{2n})(2 \cdot 10^n + 1) + C_2^2(2 \cdot 10^n + 1)^2$

$= C_0^2 10^{4n} + C_1^2 \cdot 2 \cdot 10^{3n} + C_1^2 \cdot 10^{2n} \cdot 1$

$+C_2^2[c_0^2(2 \cdot 10^n)^2 + C_1^2 \cdot 2 \cdot 10^n \cdot 1 + c_2^2 \cdot 1^2]$

$= C_0^2 10^{4n} + C_1^2 \cdot 2 \cdot 10^{3n} + C_1^2 10^{2n}$

$+ C_2^2 C_0^2(2^2 \cdot 10^{2n}) + C_2^2 C_0^2(2 \cdot 10^n) + C_2^2 c_2^2 \cdot 1$

$= 10^{4n} + 4 \cdot 10^{3n} + 2 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1$

$= (10^{4n} + 1) + 4 \cdot 10^n(10^{2n} + 1\ ) + 6 \cdot 10^{2n}$

V、

$a_1: 11011^2 = 121242121$

$a_2: 110011^2 = 12102420121$

$a_3: 1100011^2 = 1210024200121$

公式:$(10^{n+3} + 10^{n+2} + 10 + 1)^2$
$= (10^{2n+6} + 1) + 2 \cdot 10(10^{2n+4} + 1) + 10^2(10^{2n+2} + 1)$
$+2 \cdot 10^{n+2}(10^2 + 1) + 4 \cdot 10^{n+3}$
證明:
$(10^{n+3} + 10^{n+2} + 10 + 1)^2$

$= [(10^{n+3} + 10^{n+2}) + (10+1)]^2$
$= C_0^2(10^{n+3} + 10^{n+2})^2 + C_1^2(10^{n+3} + 10^{n+2})(10+1) + C_2^2(10+1)^2$
$= C_0^2[C_0^2 10^{2n+6} + C_1^2(10^{n+3})(10^{n+2}) + C_2^2 10^{2n+4}]$
$+C_1^2(10^{n+4} + 10^{n+3} + 10^{n+3} + 10^{n+2})$
$+C_2^2[C_0^2 10^2 + C_1^2 \cdot 10 \cdot 1 + C_2^2 1^2]$
$= C_0^2 C_0^2 10^{2n+6} + C_0^2 C_1^2 10^{2n+5} + C_0^2 C_2^2 10^{2n+4}$
$+C_1^2 10^{n+4} + C_1^2 \cdot 2 \cdot 10^{n+3} + C_1^2 10^{n+2} + C_2^2 C_0^2 10^2 + C_2^2 C_1^2 10 + C_2^2 C_2^2 1$
$= 10^{2n+6} + 2 \cdot 10^{2n+5} + 10^{2n+4}$
$+2 \cdot 10^{n+4} + 4 \cdot 10^{n+3} + 2 \cdot 10^{n+2} + 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$
$= (10^{2n+6} + 1) + 2 \cdot 10(10^{2n+4} + 1) + 10^2(10^{2n+2} + 1)$
$+2 \cdot 10^{n+2}(10^2 + 1) + 4 \cdot 10^{n+3}$

VI、

$a_1: 1111^2 = 1234321$

$a_2: 1010101^2 = 1020304030201$

$a_3: 1001001001^2 = 1002003004003002001$

公式:$(10^{3n} + 10^{2n} + 10^n + 10)^2 = (10^{6n} + 1) + 2 \cdot 10^n(10^{4n} + 1)$
$+3 \cdot 10^{2n}(10^2 + 1) + 4 \cdot 10^{3n}$
證明:
$(10^{3n} + 10^{2n} + 10^n + 10)^2$
$= [(10^{3n} + 10^{2n}) + (10^n + 1)]^2$
$= C_0^2(10^{3n} + 10^{2n})^2 + C_1^2(10^{3n} + 10^{2n})(10^n + 1) + C_2^2(10^n + 1)^2$
$= C_0^2[c_0^2 10^{6n} + C_1^2(10^{3n})(10^{2n}) + C_2^2 10^{4n}]$
$+C_1^2(10^{4n} + 10^{3n} + 10^{3n} + 10^{2n}) + C_2^2[C_0^2 10^{2n} + C_1^2 10^n \cdot 1 + C_2^2 1^2]$
$= C_0^2 C_0^2 10^{6n} + C_0^2 C_1^2 10^{5n} + C_0^2 C_2^2 10^{4n}$
$+C_1^2 10^{4n} + C_1^2 \cdot 2 \cdot 10^{3n} + C_1^2 10^{2n} + C_2^2 C_0^2 10^{2n} + C_2^2 C_1^2 10^n + C_2^2 C_2^2 1$
$= 10^{6n} + 2 \cdot 10^{5n} + 3 \cdot 10^{4n} + 4 \cdot 10^{3n} + 3 \cdot 10^{2n} + 2 \cdot 10^n + 1$
$= (10^{6n} + 1) + 2 \cdot 10^n(10^{4n} + 1) + 3 \cdot 10^{2n}(10^2 + 1) + 4 \cdot 10^{3n}$

VII、

$a_1: 10101^2 = 102030201$

$a_2: 101101^2 = 10221412201$

$a_3: 1011101^2 = 1022325232201$

計算方法:利用乘法公式:$(A+100B)^2=A^2+200AB+10000B^2$將計算拆成兩個部分，最後再將其合併(舉$10101^2$為例，將其拆解成$[10001+(1\cdot 100)]^2=10001^2+2\cdot 10001\cdot(1\cdot 100)+(1\cdot 100)^2$，由上述可知，$A$為10001，$100B$為$1\cdot 100$，以此類推。)

A^2:

令$a_n=10^{n+3}+1$

$a_1^2: 10001^2=100020001=10^8+2\cdot 10^4+1$

$a_2^2: 100001^2=10000200001=10^{10}+2\cdot 10^5+1$

$a_3^2: 1000001^2=1000002000001=10^{12}+2\cdot 10^6+1$

$\rightarrow a_n^2=(10^{n+3})^2+2\cdot 10^{n+3}\cdot 1+1^2=10^{2n+6}+2\cdot 10^{n+3}+1$

公式:$a_n^2=10^{2n+6}+2\cdot 10^{n+3}+1$

B^2:

令$b_n=10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1$

$b_1^2: 1^2=1=1$

$b_2^2: 11^2=121=10^2+2\cdot 10^1+1$

$b_3^2: 111^2=12321=10^4+2\cdot 10^3+3\cdot 10^2+2\cdot 10^1+1$

公式:$b_n^2=1\cdot 10^{2n-2}+2\cdot 10^{2n-3}+\cdots+(n-1)\cdot 10^n+n\cdot 10^{n-1}$
$+(n-1)\cdot 10^{n-2}+\cdots+2\cdot 10^1+1$

$2AB$:

$2a_n\cdot b_n=2\cdot(10^{n+3}+1)\cdot(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10^1+1)$

$=2\cdot(10^{2n+2}+10^{2n+1}+\cdots+10^{n+4}+10^{n+3}+10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10^1+1)$

公式合併:$(A+100B)^2=A^2+200AB+10000B^2$

證明：

$(a_n+100b_n)^2$

$=a_n^2+2\cdot 10^2\cdot a_nb_n+10^4\cdot b_n^2$

$=1\cdot 10^{2n+6}+2\cdot 10^{n+3}+1$

$+2\cdot 10^2(10^{2n+2}+10^{2n+1}+\cdots+10^{n+4}+10^{n+3}+10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10^1$

$+1)$

$+10^4\cdot(1\cdot 10^{2n-2}+2\cdot 10^{2n-3}+\cdots+(n-1)\cdot 10^n+n\cdot 10^{n-1}+(n-1)\cdot$
$10^{n-2}+\cdots+2\cdot 10^1+1)$

$=1\cdot 10^{2n+6}+2\cdot 10^{n+3}+1$

$+2\cdot 10^{2n+4}+2\cdot 10^{2n+3}+\cdots+2\cdot 10^{n+6}+2\cdot 10^{n+5}+2\cdot 10^{n+1}+2\cdot 10^n+\cdots$

$+2\cdot 10^3+2\cdot 10^2$

$+1\cdot 10^{2n+2}+2\cdot 10^{2n+1}+\cdots+(n-1)\cdot 10^{n+4}+n\cdot 10^{n+3}+(n-1)\cdot 10^{n+2}+\cdots$

$+2\cdot 10^5+1\cdot 10^4$

$=1\cdot 10^{2n+6}+2\cdot 10^{2n+4}+2\cdot 10^{2n+3}+3\cdot 10^{2n+2}+\cdots+(n-1)\cdot 10^{n+6}$

$+n\cdot 10^{n+5}+(n-1)\cdot 10^{n+4}+(n+2)\cdot 10^{n+3}+(n-1)\cdot 10^{n+2}+n\cdot 10^{n+1}$

$+(n-1)\cdot 10^n+\cdots+4\cdot 10^5+3\cdot 10^4+2\cdot 10^3+2\cdot 10^2+1$

$=1\cdot(10^{2n+6}+1)+2\cdot(10^{2n+4}+10^2)+2\cdot(10^{2n+3}+10^3)$

$+3\cdot(10^{2n+2}+10^4)+\cdots+(n-1)\cdot(10^{n+6}+10^n)$

$+n\cdot(10^{n+5}+10^{n+1})+(n-1)\cdot(10^{n+4}+10^{n+2})+(n+2)\cdot 10^{n+3}$

10^m	$2n+6$	$2n+5$	…	$n+5$	$n+4$	$n+3$	$n+2$	$n+1$	…	1	0
係數	1	0	…	$n-2$ $+2$	$n-1$ $+0$	$n+2$	$n-1$ $+0$	$n-2$ $+2$	…	0	1

- 已進位之回文數討論

a_n	number	a_n^2
a_1	3	9
a_2	307	94249
a_3	30693	942060249
a_4	3069307	9420645460249
a_5	306930693	94206450305460249
a_6	30693069307	942064503484305460249
a_7	3069306930693	9420645034800084305460249
a_8	306930693069307	94206450348005140084305460249
a_9	30693069306930693	942064503480050971140084305460249

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 100a_{n-1} + (-1)^n \cdot 7\text{，n} \geq 2 \end{cases}$$

由表(三)可知，此表數字的規律為由中間向外增加數字以至於其為平方回文數。且以著色跟未著色數字做為區隔，著色區塊的數字為等差型態的回文數字，未著色區塊亦同，其公差皆為±3。

參、結論

在此次研究中發現了未進位平方回文數的規律會和各個位數平方相加小於10有關，因為若各個位數平方的和≥ 10會進位導致回文狀態改變〔假設一數字為$(abcba)^2$，則$a^2 + b^2 + c^2 + b^2 + a^2 < 10$〕，也發現$3^2 \rightarrow 307^2 \rightarrow 30693^2 \cdots$為進位後產生的平方回文數，而在此進位產生的回文數中，雖然計算中會有進位的情況產生，但是，當著色區塊的等差型態數字出現進位或退位後，則打破回文的規律。在尋找未進位的平方回文數時，發現規律為無限多種，只要在各個位數之間插入相同數量的0，即可產生規律相同的回文數。

另外在這次研究中，亦發現似乎還有其他規律的進位回文數，例如:26、264、836、2636此組數字的平方亦為回文數。

4. 回文數的其他名詞定義

1. **反向數**：對任何正整數，若將它的所有位數倒置，則獲得反向數。
2. **反向倍數**：若一整數的反向數是原數的正整數倍，則稱為反向倍數。例如：6 的反向倍數是 6，1234321 的反向倍數是 1234321。這些性質展示了數字對稱在數學中的多樣應用。

5. 用反向數探討回文數

通過一個數字和它的反向數相乘，可以獲得回文數：

- $12 \times 21 = 252$
- $112 \times 211 = 23632$
- $111112 \times 211111 = 23456965432$

這類回文數稱為“顛倒乘積型回文數”。此現象反映了回文數與數字結構之間的深層聯繫。

6. 回文數補充資訊

1. **使用“196 算法”的過程：**
    - 階段性地將一個自然數和它的反向數相加，再將和數倒置並加上原和數，得到下一階段。
    - 結果通常能在數次計算後獲得回文數，這種方法展現了數學中由簡至繁的計算過程。
2. **196 的特殊性：** 即便經過多種方法，196 仍然無法生成回文數，被稱為「利克瑞爾數」(Lychrel Number)。此特性激發了數學家對特殊數字性質的深入研究。

7. 研究展望

回文數的研究不僅限於數學本身，還涉及計算機科學、密碼學和其他學科。其規律性和對稱性為數學理論提供了豐富的研究素材，也為數字藝術和教育應用帶來啟發。未來，結合現代計算技術和數學工具，回文數的性質研究將迎來更多突破。

8. 參考資料

- 回文數定理與回文數幻方

  https://web.math.sinica.edu.tw/mathmedia/journals/4480

- 你知道你的生日可以寫成三個迴文數相加嗎?
  https://sites.google.com/a/g2.nctu.edu.tw/unimath/2020/2020
  01/%E6%95%B8%E8%AB%96%E4%BD%A0%E7%9F%A5%E9%81%93%E4%BD%A0%E7%9A
  %84%E7%94%9F%E6%97%A5%E5%8F%AF%E4%BB%A5%E5%AF%AB%E6%88%903%E5%8
  0%8B%E8%BF%B4%E6%96%87%E6%95%B8%E7%9B%B8%E 5%8A%A0%E5%97%8E

- 問題有點燒腦：趣談回文數

  https://kknews.cc/zh-tw/news/bzjg3mo.html

- 中華民國第 58 屆科學展覽會作品
  https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/58/pdf/NPHSF2018-
  030418.pdf

- https://baike.baidu.com/item/回文數猜想/9823562#3

- http://www.rnta.eu/cgi-bin/three_palindromes/pal3.py