2024數學科展得獎作品分析

第一組
蔡秉哲、蕭振呈、曾泓儒、
顏融勝、郭玉霖、林雍涵

Strict Inequalities for the n-crossing Inequality (n交點不等式的嚴格不等式)

一等獎

研究動機

結 (knot) 是一種封閉且不自交的線圈，結理論則是研究三維空間中這類簡單閉曲線的學科。過去50年，結理論在多個領域中展現了實際應用，例如：在合成化學中，相同原子但形狀不同的結會呈現不同且獨特的性質，或在分子生物學中，不同的結結構會影響酶與DNA的交互作用，以及在網路安全領域，一些後量子密碼學算法依賴於難以分類結的特性。

傳統上，結理論主要透過研究結的正則投影（將結投影到平面上形成的交點）來分析，但隨著n交點投影的提出，這種投影可以更一般化地描述結的結構，從而給出了新的結不變量。然而，計算n交點數量（如cn(K)c_n(K)cn(K)）極具挑戰性，並且關於不同n交點數之間的數學不等式也十分有限，這限制了我們對這些不變量的理解。因此，找到更多關於n交點數的嚴格不等式具有重要意義。

研究目的

本研究的目的是推導出9交點投影（c9(K)c_9(K)c9(K)）的上界，並利用這些結果證明新的嚴格不等式。具體來說，我們在第3節中證明了主要結果：對於所有非平凡結而言，c9(K)≤c3(K)−2c_9(K) \leq c_3(K) - 2c9(K)≤c3(K)−2。這項結果是首次對c9(K)c_9(K)c9(K)進行的定量研究，並為已有的關於cn(K)c_n(K)cn(K)的猜想提供了新的證據，即對所有n≥2n \geq 2n≥2，cn(K)≥cn+1(K)c_n(K) \geq c_{n+1}(K)cn(K)≥cn+1(K)。

格子點的可見性研究

一等獎 & 美國國際科技展會 ISEF

研究動機

在閱讀了《Seeing Dots》的文章之後，我們對其中的主題產生了興趣，也認 為此項研究是具有發展性的。接著，指導老師提供了《Lattice Point Visibility on Generalized Lines of Sight》這篇文章，其內容主要探討於固定的正整數 b，以$f(x) = ax$^$b, a \in Q$為觀測視線，從原點 O 觀測第一象限的所有格子點之可見的機率。而兩篇文獻雖然主軸大致相同，但研 究的方向及焦點卻放在不同的面向上。因此，我們加以研究、分析、統整兩篇文獻，並將已有的結果深入研究發展，期望能從中找到更多的研究成果。

研究目的

(一) 以原點 O 為觀測點，並以$f(x) = ax\ 2$, $a \in Q$為觀測視線，探討觀測目標點集為 $V(m) = \{(i,j) | i,j \in N, 1 \le i \le m, 1 \le j \le m\}$時，可見點的數量與機率。

(二) 對於固定的$b \in \{1,2, \cdots n\}$，以原點 O 為觀測點，並以$f(x) = ax\ b$, $a \in Q$為觀測視線， 探討觀測目標點集為$V(m) = \{(i,j) | i,j \in N, 1 \le i \le m, 1 \le j \le m\}$時，可見點的數量 與機率。

(三) 研究如何布置最少的觀測點，以$f(x) = ax$^2 , $a \in Q$為觀測視線，將目標點集$V(m \times n) = \{(i,j) | i,j \in N, 1 \le i \le m\}$中的格子點觀測完畢。

(四) 對於固定的$b \in \{1,2, \cdots n\}$，研究如何布置最少的觀測點，以$f(x) = ax\ b$, $a \in Q$為觀測 視線，將目標點集$V(m \times n) = \{(i,j) | i,j \in N, 1 \le i \le m\}$中的格子點觀測完畢。

On the Application of Inequalities Containing Sums of Minimum/Maximum of Numbers (關於包含數字最小值/最大值的和的不等式的應用)

二等獎

研究動機

作者提出對不等式的簡單觀察與探討，並藉由對經濟市場中幾個例子的觀察，像是商品庫存成本計算、商品進貨量與儲存量的控制、以及提出幾種零售庫存管理的方法或公式，來提出不等式在經濟市場中的廣大應用。

研究目的

1.考察不等式：本文旨在提出並推廣一個與某些數字的最小值和最大值相關的不等式，建立一個對後續部分有用的引理。

2.在零售庫存管理中的應用：主要關注將建立的不等式應用於零售庫存管理，特別是分析和界定與庫存持有和缺貨相關的成本。

3.經濟影響：研究希望確定公司達到停業點的條件，這在古典經濟學中是一個重要概念，從而有助於更好地理解庫存管理策略

無限棋盤上的各種騎士

三等獎

研究動機

在我小時候寫生字本的時候，就常常用馬步的形式跳著寫以增添樂趣，後來 也嘗試用不同的走法來寫，常常想著要怎麼樣才能完美的填滿。而長大後也看 到了關於騎士巡遊的科普知識，因而想要研究若是套用不同走法會有什麼效果， 但由於普通的馬步問題常需要電腦程式的幫助，換了走法應該也是如此，但我 程式能力並沒有很強，因此轉而研究無限大的棋盤，這也算是滿足我時候的好 奇心。

研究目的

(一) 從移動距離少開始，研究騎士的行走方式。
(二) 分析在何種狀況下，騎士能夠走到每個格子。
(三) 尋找騎士在特定方法下所能走出的單位圖形。
(四) 找出能將單位圖形擴展到整個Z^2平面的方法。
(五) 探索移動方式和可擴展單位圖形的規律。

從心開始-三角形的四心到各邊距離和

三等獎

研究動機

在參考文獻一中，任意銳角 ΔABC 中，其外心到三邊之距離總和可表示成內切圓半徑與外接 圓半徑之和，此性質稱為卡諾定理。我們試著找出重心、垂心、內心到三邊之距離總合，並 做一系列的相關探討。

研究目的

1.求出四心到各邊之距離
2.比較四心到各邊之距離總和的大小
3.四心到各邊之距離總和之關係

由楊氏矩陣變形之三角楊氏陣列的探討

二等獎 & 加拿大科學展覽會 CWSF

研究動機

在閱讀第 54 屆中小學科學展覽會得獎作品中之「變形楊氏矩陣之探討」時，我們初次接觸到楊氏矩陣，對其產生了濃厚的興趣。我們因此發想將「方格」的楊氏矩陣變形為以 相砌的「三角形」作為格子的陣列，並制定相仿的規則，先從兩列的三角楊氏陣列開始， 希望能得出一些有趣的組合結果。

研究目的

(一)訂定標準三角楊氏陣列的規則。
(二)計算任意兩列三角楊氏陣列的遞迴關係式。
(三)透過雙變數生成函數，求出任意兩列三角楊氏陣列的一般化公式。

名詞解釋

(一)楊氏矩陣(Young Tableau)：

1. 楊氏矩陣(或稱楊表)由有限多個相鄰的方格排列而成，其中各橫列的左 邊對齊長度由下而上遞增

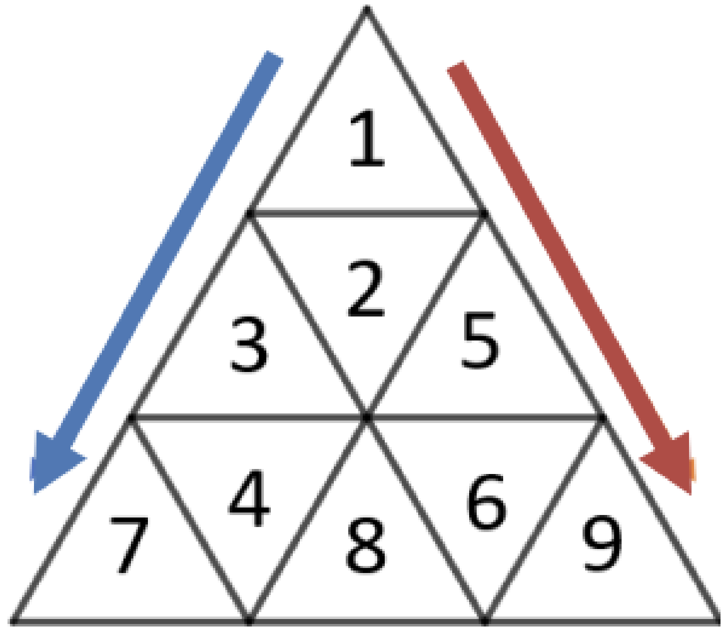
2. 標準楊氏矩陣(Standard Young Tableau)的 n 個方格中任意填入 1 到 n 中相異的正整 數，且每列與每行元素皆嚴格遞增，如下圖。

1	2	6	7
3	4		
5			

名詞解釋

二)標準三角楊氏陣列:

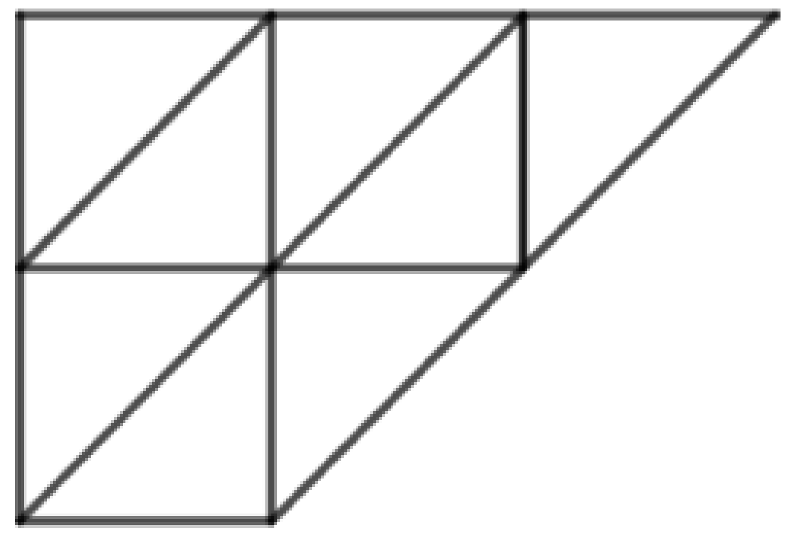
將楊氏矩陣的方格變形為相砌三角形，限制三角形陣列其中兩個方向的相 鄰元素滿足 嚴格遞增，我們命名其為標準三角楊氏陣列。例如：下圖 即為一種填入方法，其中 1<2<3<4<7，5<6<8 滿足 方向 ，而 1< 2< 5 <6< 9，3 <4 <8 滿足 方向 相鄰元素嚴格遞增的要求。



兩列三角楊氏陣列

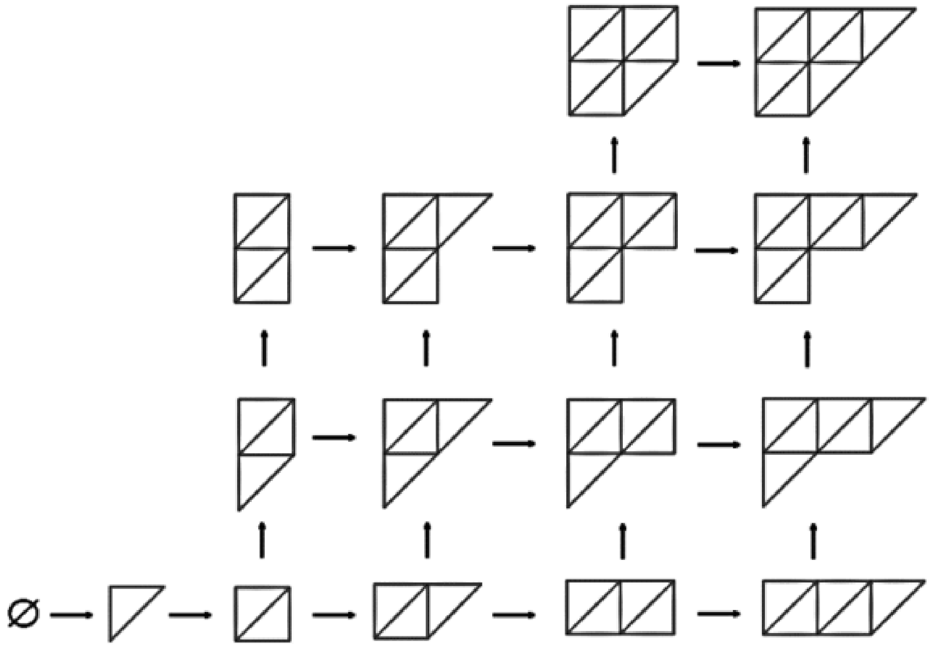
定理：

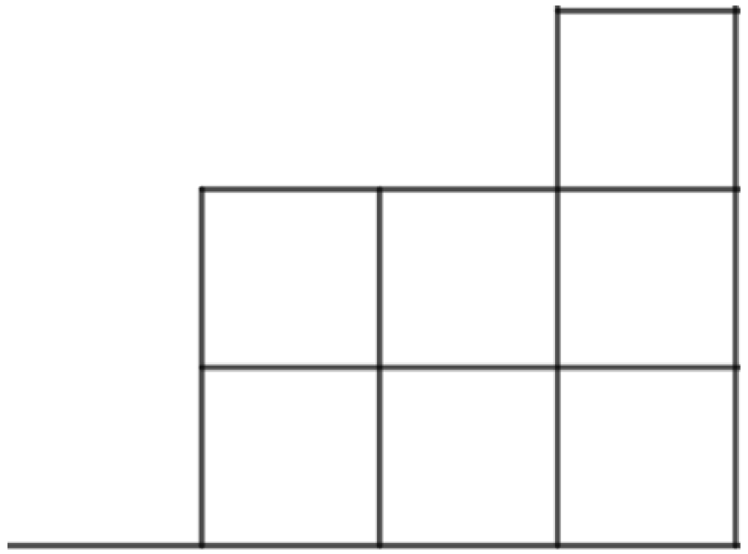
將楊氏矩陣的方格沿對角線分為兩個三角形，此時我們稱每一橫排的相砌三角形為一列，每一直排的相砌三角形為一行。與 楊氏矩陣的規則相彷，三角楊氏陣列須滿足每列由左到右、每行由上到下嚴格遞增。我們定義第一列有 m 個、第二列有 n 個三角形格子的兩列三角楊氏陣列填入數字的方法數 為 $a_{m,n}$ 。以下圖為例，第一列有 5 個三角形，第二列有 3 個三角形，於是我們將數字 填入的方法數記為 $a_{5,3}$。



兩列三角楊氏陣列的路徑問題

在兩列的三角楊氏陣列，可以對應為一種二維的路徑問題，每種填入方法對應到一條路徑，右圖為其簡化的路徑圖形。將左圖格子長出來的順序想像為在格子中依序填入數字，若下一 個數字填在第一列，即在路徑圖中向右走；若填在第二列，即在路徑圖中向上走，因此 我們便能把一種三角楊氏陣列的填法，對應到右圖的一種路徑走法，即兩者可以一一 對應，方法數相同。 又因為每個方格中的兩個三角形須都填入數字後，才能往右或往下填，所以路徑圖是會 以每兩格為單位，往右及往上做延伸。

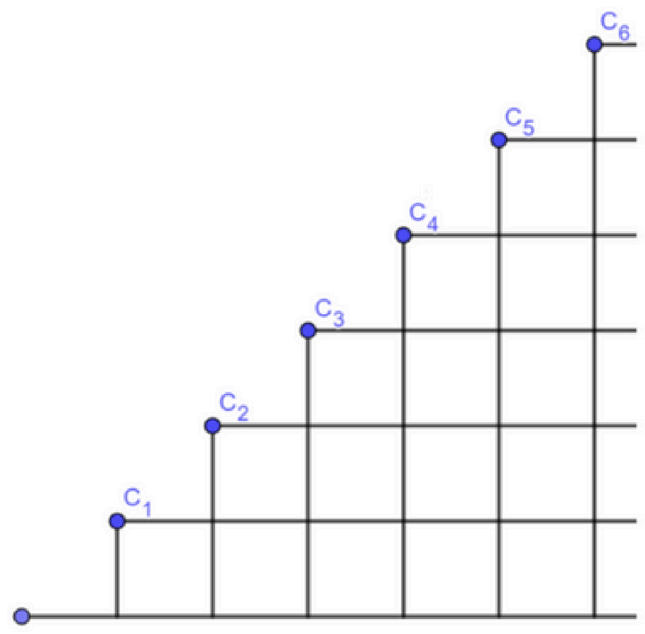


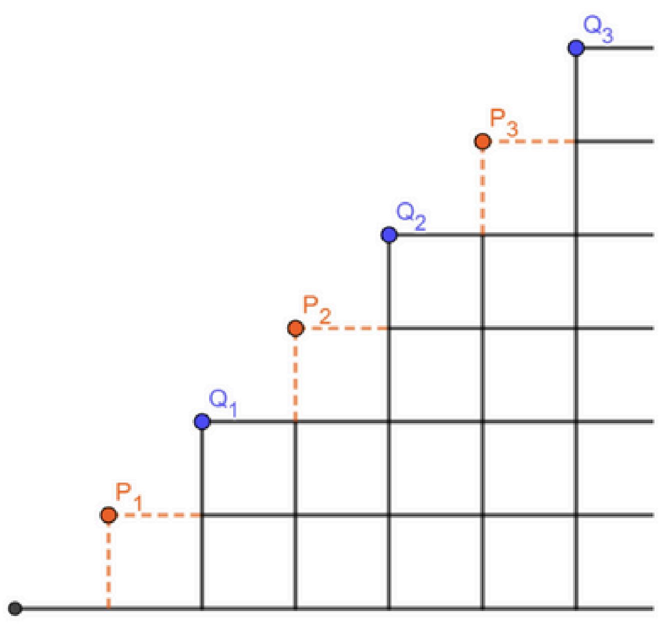


兩列三角楊氏陣列的路徑問題

將兩列三角楊氏陣列的 Hasse Diagram(簡化為右邊路徑圖)與兩列楊氏矩陣的 Hasse Diagram(簡化為左邊路徑圖)比較，可見兩者相似之處。

兩列皆有 n 個格子的楊氏矩陣，對應到左路徑圖中端點 $C_n(n,n)$，也就是方法數為卡特蘭 數的第 n 項；而在三角楊氏陣列所對應的右路徑圖中，有些端點$(2t-1,\ 2t-1)\ \forall t \in \mathbb{N}$ 卻不存在，這些點我們命名為P_t。用 p_n 表示沒有走到P_{n-1} 、P_{n-2} 、…、P_1 ，第一次走到 p_n 的方法數；q_n 表示右路徑圖 第 n 個端點Q_n的方法數。





p_n 與 Q_n 遞迴關係式

p_n 的遞迴式：

$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_n = p_n = c_{2n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} p_k c_{2n-2k} \text{，} \forall n \geq 2 \end{cases}$$

，其中 $<c_n>$ 表示卡特蘭數。

q_n 的遞迴式：

$$\begin{cases} q_0 = 1 \\ q_n = c_{2n} - \sum_{k=1}^{n} p_k c_{2n+1-2k} \text{，} \forall n \geq 1 \end{cases}$$

，其中 $<c_n>$ 表示卡特蘭數。

附註 $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$

三角楊氏矩陣的相關定理

定理一 令p_n之生成函數$P(x)=\sum_{n\geq 1} p_n x^n$，$P(x)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+4\sqrt{x}}+\sqrt{1-4\sqrt{x}}-1-\sqrt{1-16x}\right)$

定理二 $p_n=\frac{1}{4}\binom{\frac{1}{2}}{2n}4^{2n}\times 2-\frac{1}{4}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-16)^n=2^{2n-1}c_{n-1}-c_{2n-1}$

定理三 令q_n之生成函數$Q(x)=\sum_{n\geq 1} q_n x^n$，$Q(x)=\frac{4}{\sqrt{1+4\sqrt{x}}+\sqrt{1-4\sqrt{x}}+2}$

定理四 $p_{n+1}+q_n=2c_{2n}$

定理五 $q_n=2c_{2n}-2^{2n+1}c_n+c_{2n+1}$

三角楊氏矩陣的相關定理

定理六

$$\begin{cases} a_{m,n}=r_{m,n}-\sum\limits_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} p_k r_{m-2k+1,n-2k+1} & \text{，} n \text{ 為奇數} \\ a_{m,n}=r_{m,n}-\sum\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}} p_k r_{m-2k+1,n-2k+1} & \text{，} n \text{ 為偶數} \end{cases}$$

，其中 $r_{m,n}=\binom{m+n}{n}-\binom{m+n}{n-1}$

定理七

$$a_{m,n}=\sum_{k=0}^{\frac{m-n-t}{2}}(-1)^k\binom{\frac{m-n-t}{2}}{k}a_{m-k,\frac{m+n-t}{2}} \begin{cases} t=0 & \text{，當 } \dfrac{m+n}{2} \text{ 為偶數} \\ t=1 & \text{，當 } \dfrac{m+n}{2} \text{ 不為整數} \\ t=2 & \text{，當 } \dfrac{m+n}{2} \text{ 為奇數} \end{cases}$$

定理八

$$a_{m,n}=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} q_k \frac{m-n}{n+m-4k}\binom{n+m-4k}{n-2k}$$

，其中 $q_n=2c_{2n}-2^{2n+1}c_n+c_{2n+1}$ 。

謝謝大家！