2023 臺灣國際科學展覽會 得獎作品介紹

411231201 陳冠章　411031209 謝燿璘
411231113 洪苡宸　411031147 蕭煒磬
411231212 王信融　411231242 蕭應科

一等獎

彈跳光點之無限反射曲線存在性研究

研究動機

彈跳光點問題是 2018 年時我在浴室裡想到的，看著地上的積水，思考如果地面上方有一面無限延伸的鏡子，這時從眼睛發射光線與地上的水以及鏡子反射時，在什麼樣的條件下可以保證光線無限往前延伸？
2021 年在 Youtube 上看到了 3Blue1Brown 的影片，才發現了將反射過程往前延伸的觀點，今年決定先假設知道θn序列再回推曲線後，有了過去作品中的的大部分研究結果，但仍然無法證明任何反射曲線的可行性，直到 2022 年 9 月寫信向動態系統學者請教後才發現了$1+e-x$的可行性，在看到這個可能性後，我自行證明了該位學者給出的條件並進行了優化，也對有理函數的情況進行了研究。

研究目的

（一） 找到用入射角度和切線角度決定新入射角度遞迴式。
（二） 找到一個正可微嚴格遞減上彎，且函數值趨近於非零正數的曲線， 讓光點反射時一直向前彈跳。
（三） 在完成（二）後，探討函數值趨近於零的情況。

二等獎

Z 字型路徑長度及面積等量關係之探討

研究動機

高一時，有一次數學科布告欄上公告了兩張海報大的「進階問題之探究饗宴」，是在探討圓上的 Z 字形路徑長度以及 Z 字形路徑所分割出的面積關係。國中時就對幾何有興趣的我，花了許多時間解決海報上問題，而後與數學老師討論。在數學老師的鼓勵下，決定繼續將海報上的問題推廣，做更進一步的探究。

研究目的

除了初始問題以外，數學科海報上還有 Z 字形路徑在圓上的更一般化情形
之相關問題。從初始問題的圓上七個點，討論到圓上有任意大於3的奇數點的 Z
字形路徑平方長度問題。再由奇數個點發展至任意大於2的偶數點的 Z 字形路徑
平方長度問題。接著，探討有別於初始問題之外的一次方長度問題。而面積問
題在本研究中，除了證明初始問題之等式成立以外，再將初始問題推廣至圓上
有任意大於3個奇數點即有任意大於2個偶數點。這些分別是底下的研究問題
1.、2.和 3.。這些問題在本研究中，分成長度問題和面積問題討論。
然而，在解決海報上的問題之後，和老師討論海報上的問題時，也討論到
了將此一問題繼續發展的可能性。因此，底下的問題 4.便是更進一步想要探討
的問題。

三等獎

Frieze Patterns、Farey Sequence 關聯性探討與具 1-鋸齒或 0-鋸齒 Frieze Patterns 之研究

研究動機

在某次上課時，老師提出一個由正整數構成具有特殊性質的梯形網狀結構（如圖 1），
並請我們觀察：這些鄰近的數字之間有什麼關係？此結構有什麼規律？具有哪些對稱性？
我們花了將近一小時，找到了大約 7 個性質，但大多集中在數字的對稱關係：圖形最中
央的 2 為旋轉中心（所有數字繞中心轉 180 度後數字分佈與原圖相同）、最左方前六列邊長
為六個數的倒立三角形與最右方同大小的倒三角形全等，正中間後六列邊長為六個數的正立
三角形可由左右兩三角形之一的水平鏡射得到）、連續若干個數的數字和相等（例如：正中
央直行 222 除外，每一列的左三數和與右三數和均相等）、每一列都有至少兩個迴文數（例
如：第二列有迴文數 132151231 及 512313215，第三列有 25144152 及 41522514，第四列有
3332333 及 3233323，
…）等。
但我們卻沒看出最關鍵之處——網狀結構中任一組菱形結構（上下左右）四個數字的關
係：(左)(右) – (上)(下) = 1，任一橫列每八個數字一循環，以及第二列前八個數字可由八邊
形的任意一組三角剖分（即任意作八邊形內部的五條互不交叉的對角線，將八邊形分成六個
三角形）中，從任一頂點開始，依逆（或順）時針序每個頂點的三角形數所決定。當時聽到
這些性質就覺得這實在太神奇了！幾何、數字與對稱結構竟如此巧妙地結合在一起，引發了
我們高度的興趣，也開啟了此篇的研究。

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 3 2 1 5 1 2 3 1 3 2 1 5
2 5 1 4 4 1 5 2 2 5 1 4
3 2 3 3 3 2 3 3 3 2 3
1 5 2 2 5 1 4 4 1 5
2 3 1 3 2 1 5 1 2
1 1 1 1 1 1 1 1

圖 1：原始問題（[7], p 44）

四等獎

Construction of Brahmagupta n-gons by Chebyshev Polynomials

研究動機

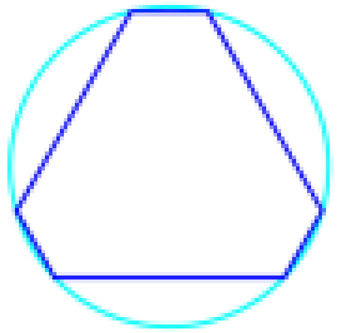


圖 1：圓內接六邊形

此題出處為Crux Mathematicorum, Vol. 45(6), July 2019[1]，原題是加拿大數學競賽 W.J. Blundon Contest 的題目。如圖 1，圓內接六邊形的邊長分別為1,3,1,3,1,3 ，試求此六邊形的面積。我先前有兩篇研究，第一篇[2]是討論圓內接多邊形有兩種相異整數邊長 a, b，並求出 (a,b(n-1))與(a(2),b(n-2))邊長的一般式。第二篇[3]是找出三種以上相異整數邊長的圓內接多邊形其邊長的一般式。但我很好奇在我的研究中[2,3]，是否有找到所有兩種以上相異邊長的一般式，而且我的方法是可以指定邊數，例如 (a(2),b(5)) ，再建構多邊形。我的作品中提出與參考文獻[5,6,8]不同的建構方法。我們利用倍角建構法會導致邊長很大，因此在本研究中，我改成在單位圓上，作出邊長為有理數的圓內接多邊形，其實在[3]中的定理 15 我提出「在複數平面的單位圓|z|=1上，存在邊長皆相異且皆為有理數的圓內接n 邊形。且其所有對角線長亦為有理數。」的想法，但證明不夠完整。本作品中我沿用此想法並將邊長 a,b,c,d,... 由自然數改為有理數。這樣做出的多邊形可伸縮變為邊長為整數的完美多邊形。此時完美多邊形與伸縮後的Brahmagupta n-gons 等價，即邊長、外接圓半徑、所有對角線長與面積皆為整數。

研究目的

(一) 文獻[3]中的完美多邊形是否是所有的完美多邊形？
(二) 討論Brahmagupta n-gons 的倍角建構。
(三) 以Chebyshev Polynomials 建構 Brahmagupta n-gons。

四等獎

探討圓及橢圓上的格子點個數之連乘積表達式

研究動機

在專題研究中，閱讀科學月刊 (游森棚[1])：「圓上的格子點」，文章中提到由數學家
勒讓德 (Legendre) 與高斯 (Gauss) 計算圓上的格子點之個數性質：
給定圓方程式為x^2 +y^2=m，設 N1(m)與 N3(m)分別為 m 的奇因數中模 4 餘 1 與模 4 餘 3 的個數，
則圓上恰通過4[N1(m)-N3(m)]個格子點。

對上述性質除了好奇外，更感興趣是否能推導另一個圓上的格子點個數公式呢？此個數
是以連乘積形式呈現，於是想推廣至橢圓Ωs: x^2+sy^2 =m(s為黑格納數)上的格子點個數，
同樣此個數是以連乘積形式呈現。為了對連乘積表達式有進一步認識，再查閱到 J.Cilleruelo
and A.C´ordoba [5]中 Corollary 4.(p5)給我們啟發：在某些特定條件下，橢圓上的格子點個數
是存在連乘積表達式。我們首先探討質數 p 在虛二次體 [根號-s] 的整數環中的分解性，分
解性如何分類呢？在 Aleksander Skenderi [2]中有探討x^2+sy^2=p(s=1,2,3,7)有整數解的充
要條件為特定型質數，進一步探討其餘黑格納數 s 的情況。我們將這些特定型質數由分解性
做分類，再由分解性協助計數圓及橢圓Ωs: x^2+sy^2 =m上的格子點個數。

研究目的

一、探討質數 p 在虛二次體[根號-s]的整數環中的分解性。
二、計數圓及橢圓Ωs: x^2+sy^2 =m上的格子點個數，並且此個數以連乘積表達式呈現。

三等獎

整數模 n 的加法組合設計之探討

研究動機

在課餘時間與老師討論數學專題的過程中，老師介紹了各種數學領域的問題，我從中瞭
解數學領域的多樣性，而組合學中的問題經常有實際的情境來相呼應，在探索研究的主題時，
我偶然發現了這個齒輪問題，題目敘述如下：

設有兩個完全相同的齒輪A、B ，各有13角，將兩者重疊在一起，然後任意砍去
4 對重合的角。請問：是否能將上方的齒輪繞公轉軸旋轉至一適當位置，使得兩齒輪
在水平面上的投影仍為一個完整齒輪？

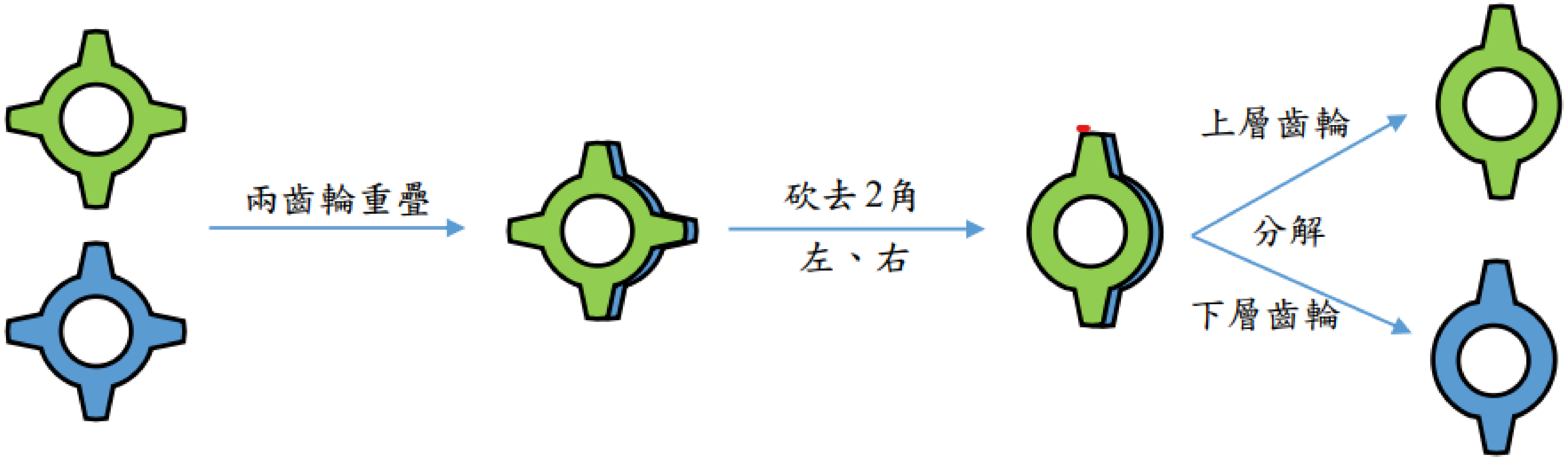
在一開始看到此題目時，我直覺地認為答案是肯定的，然而卻無從證明，於是採用窮舉
法的方式來驗證自己的想法，結果答案出乎意料地背離了我最初的判斷，因此令我想要更深
入的研究這個有趣的齒輪問題。而在這之後產生第一個聯想的方向正好和原問題有所不同，
我想要得知兩個角數相同齒輪在重疊的情況下，至少要砍去幾對重合的角，才能使上層齒輪
無論如何轉動，都無法在水平面上的投影形成一個完整的齒輪，也就是說存在一種特殊砍去
重合角的方式，在砍去重合的角之後，不論上層齒輪如何轉動，其相對位置從上往下看時，
必然都會有共同缺角的情形。

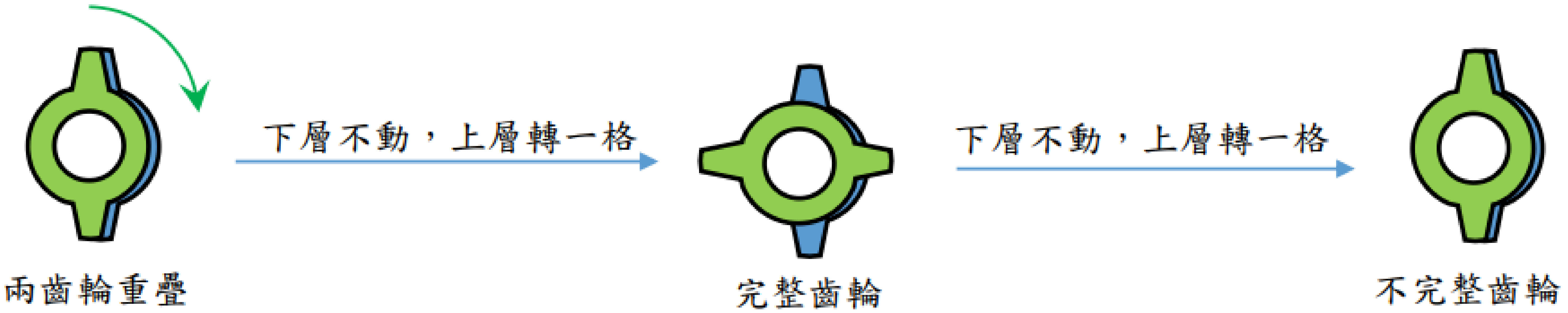
研究目的

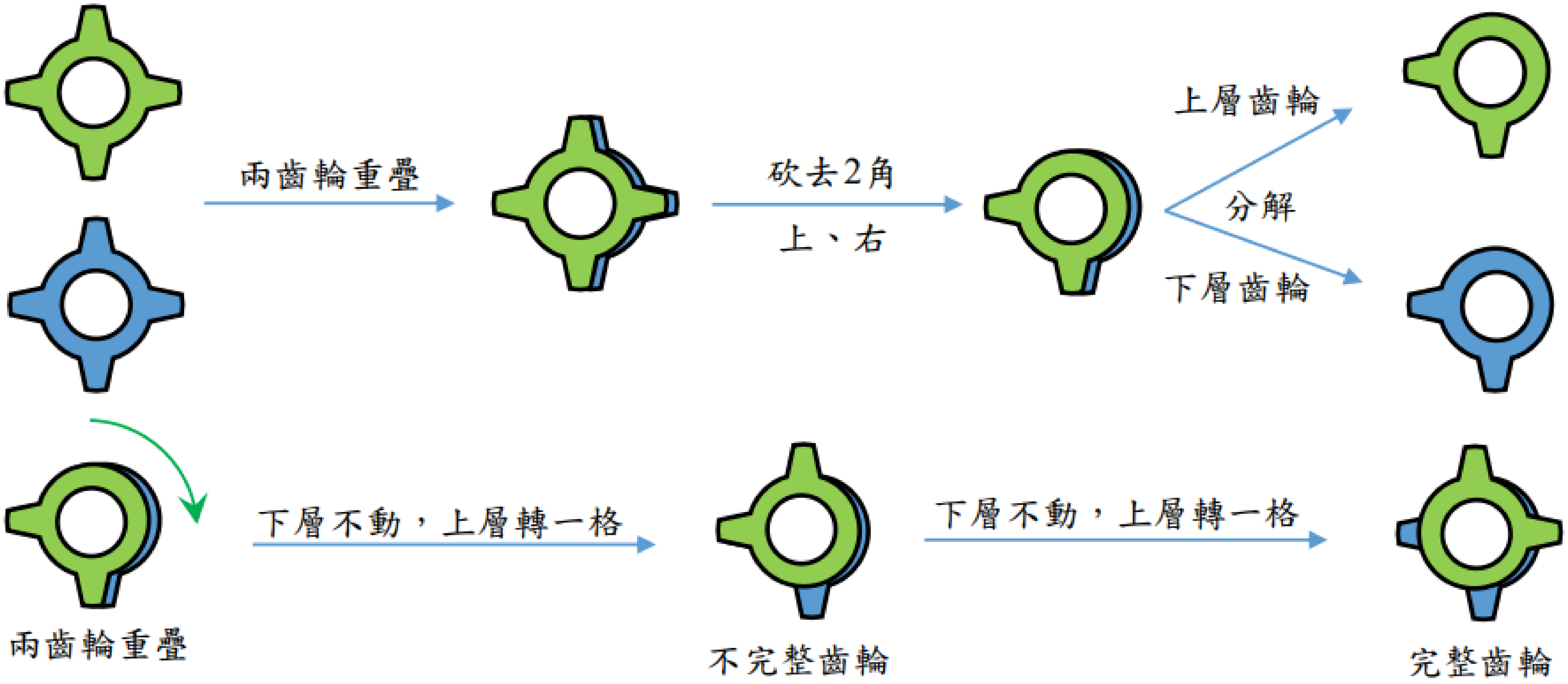
若齒輪共有 n 個角，則稱為 n 角齒輪。將兩個相同的 n 角齒輪上下重疊後，若至少需砍去 f(n)對重合的角，才能使得齒輪在任何轉動的情況下，水平投影皆為不完整的齒輪，則 f(n)稱為 n 角齒輪的『最小可行數』 。以下為我的研究目的：

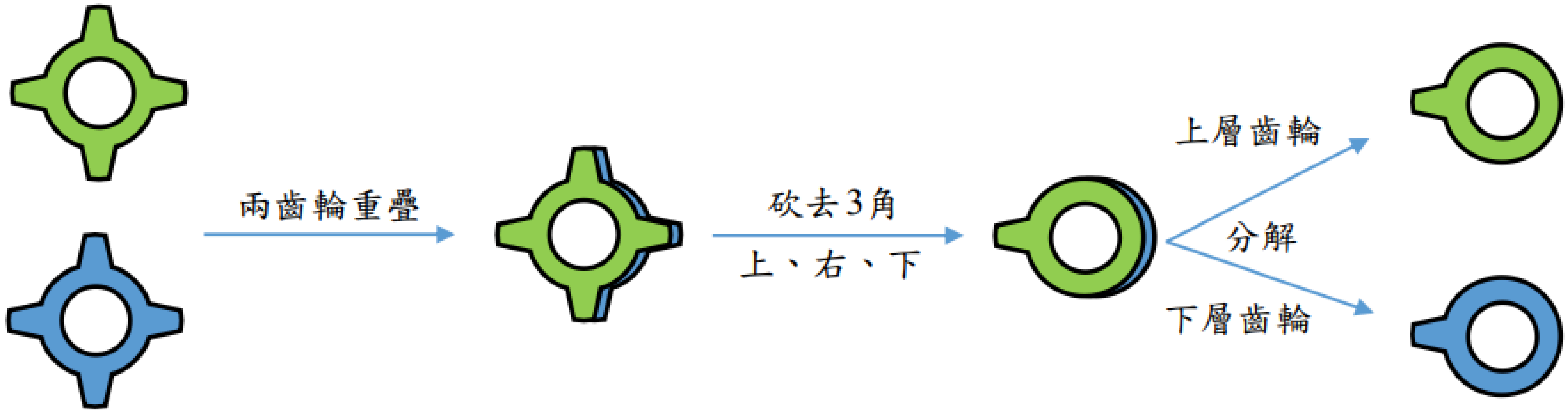
（1）設計砍去重合角的數量以及位置，從中得知 f(n)的上界；

（2）對於一般的 n ，得出f(n) 的下界。對於特殊的 n ，探討缺角位置為最緊緻的可能性。

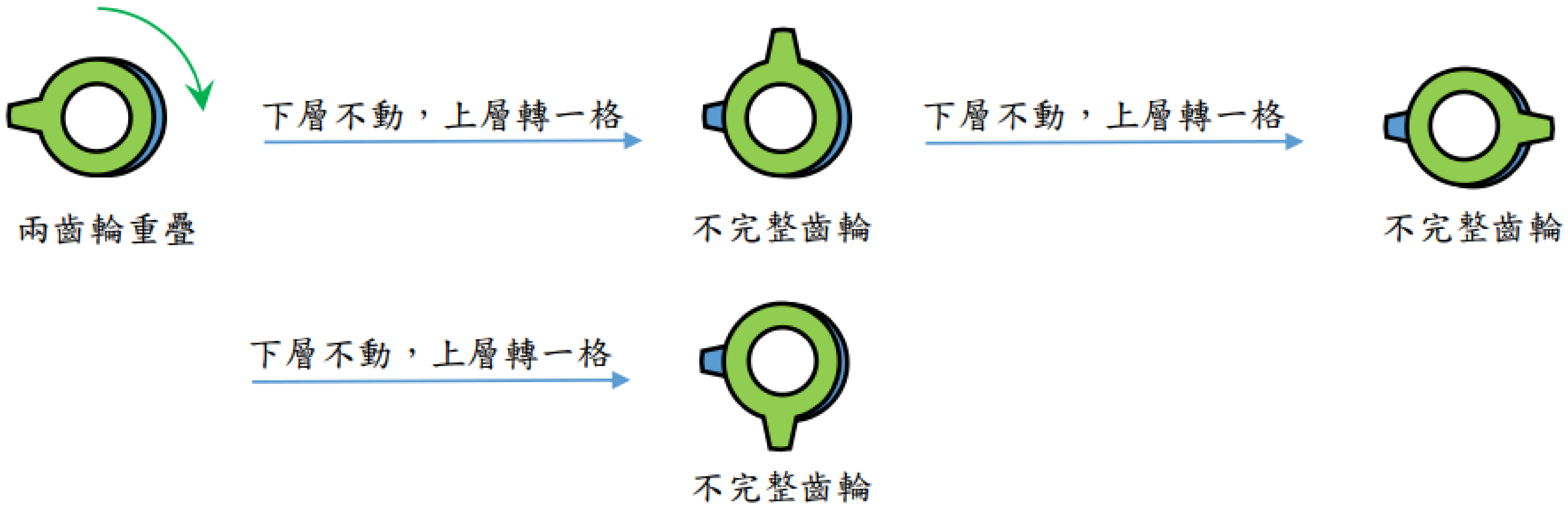

兩齒輪重疊
砍去2角
左、右
上層齒輪
分解
下層齒輪


下層不動，上層轉一格
下層不動，上層轉一格
兩齒輪重疊
完整齒輪
不完整齒輪


兩齒輪重疊
砍去2角
上、右
上層齒輪
分解
下層齒輪
下層不動，上層轉一格
下層不動，上層轉一格
兩齒輪重疊
不完整齒輪
完整齒輪



由上述可知，
對於 4 角齒輪，砍去 2 對重合的角是無法達成讓齒輪在任何轉動的情況下皆為不完整的效果，



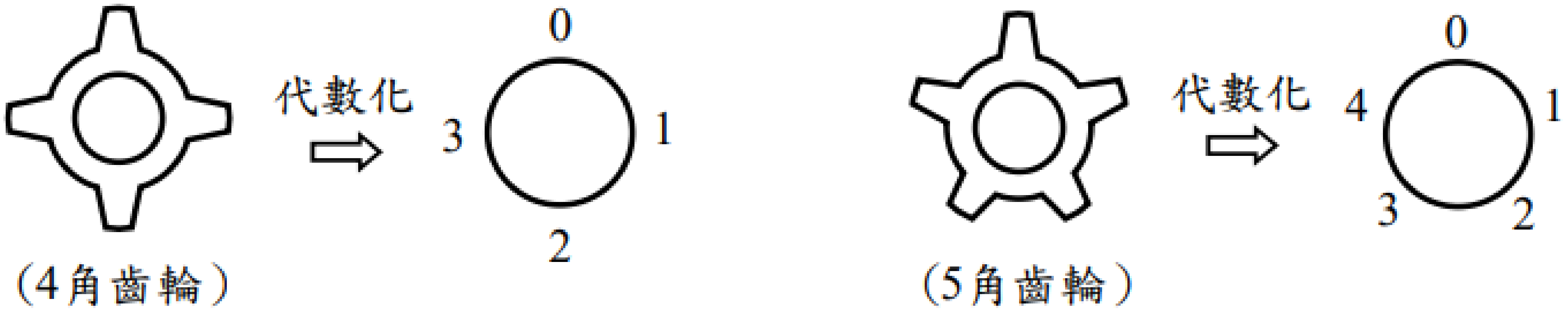
而砍去 3 對重合的角則可達成。
也就是說：對於 4 角齒輪，須砍去的最小 角數為 3。

第二PART

方法與結果

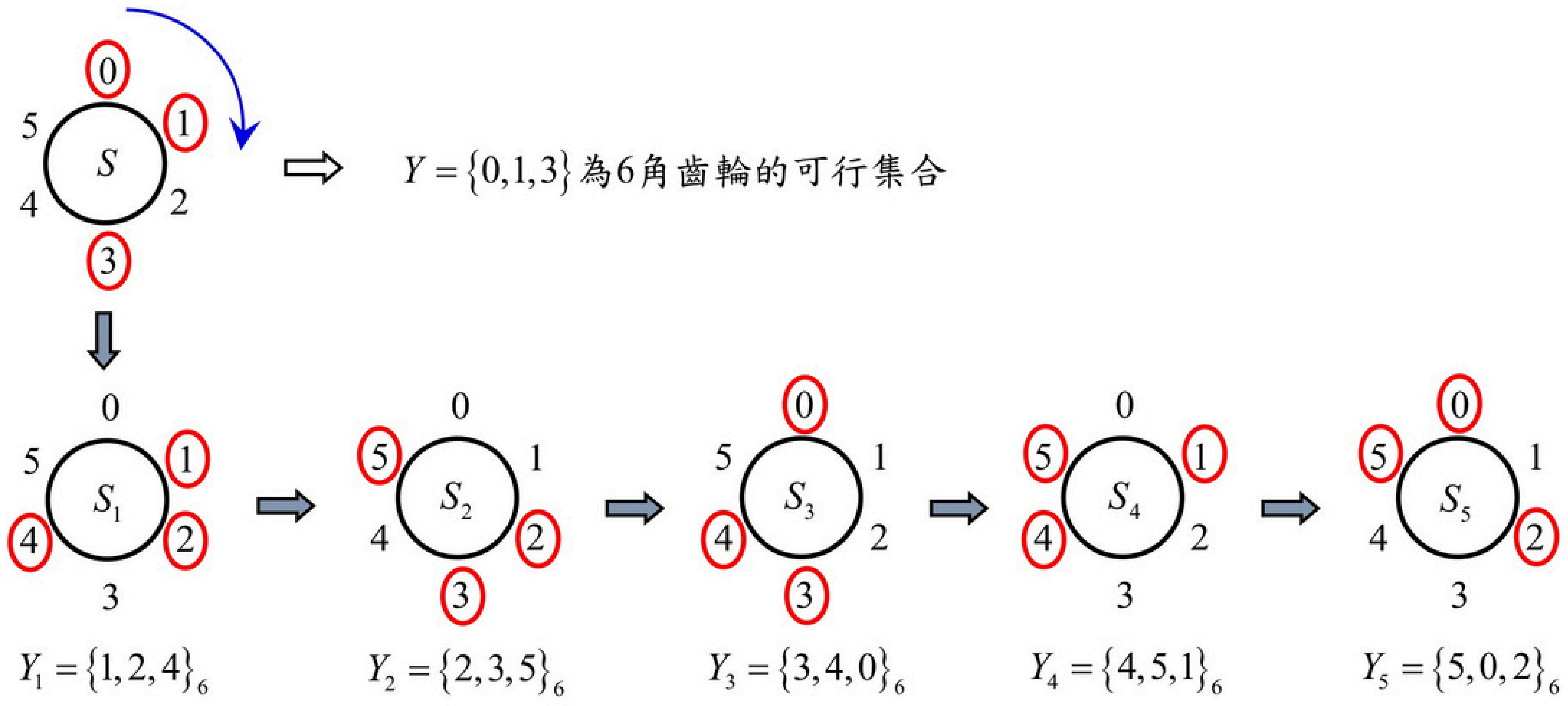
為了使原本複雜的圖形簡化，將齒輪上的每個角都用一個數字來表示，齒輪正上方為 0，並以順時針依序遞增填入自然數。

EX:

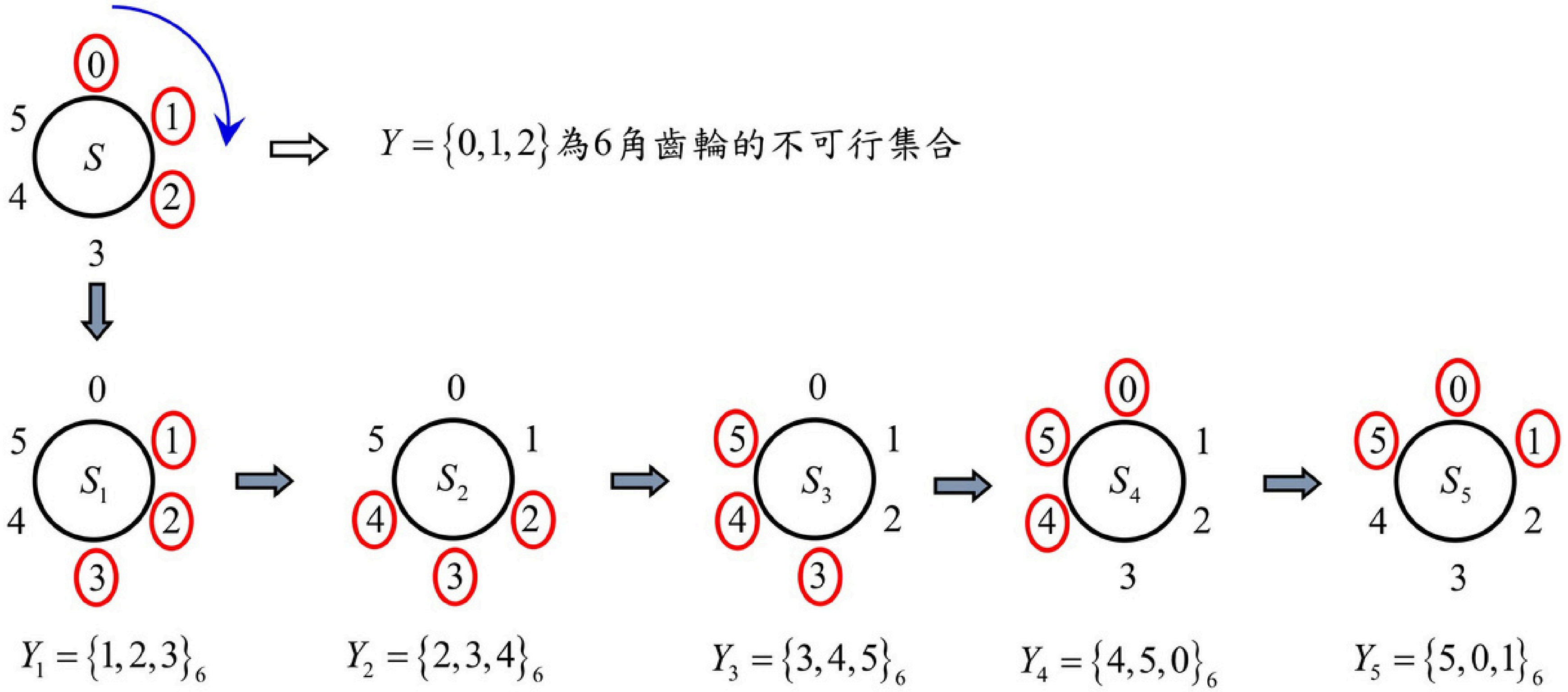


缺角集合→代表兩齒輪疊在一起後
同時砍掉的角的位置標誌
上方齒輪無論如何轉動，兩齒輪投影
皆有缺口，稱為可行集合
若轉動至所有缺口皆被補齊，則稱其
集合為不可行集合

因為可行集合並非唯一
所以我們以最小可行集合為代表

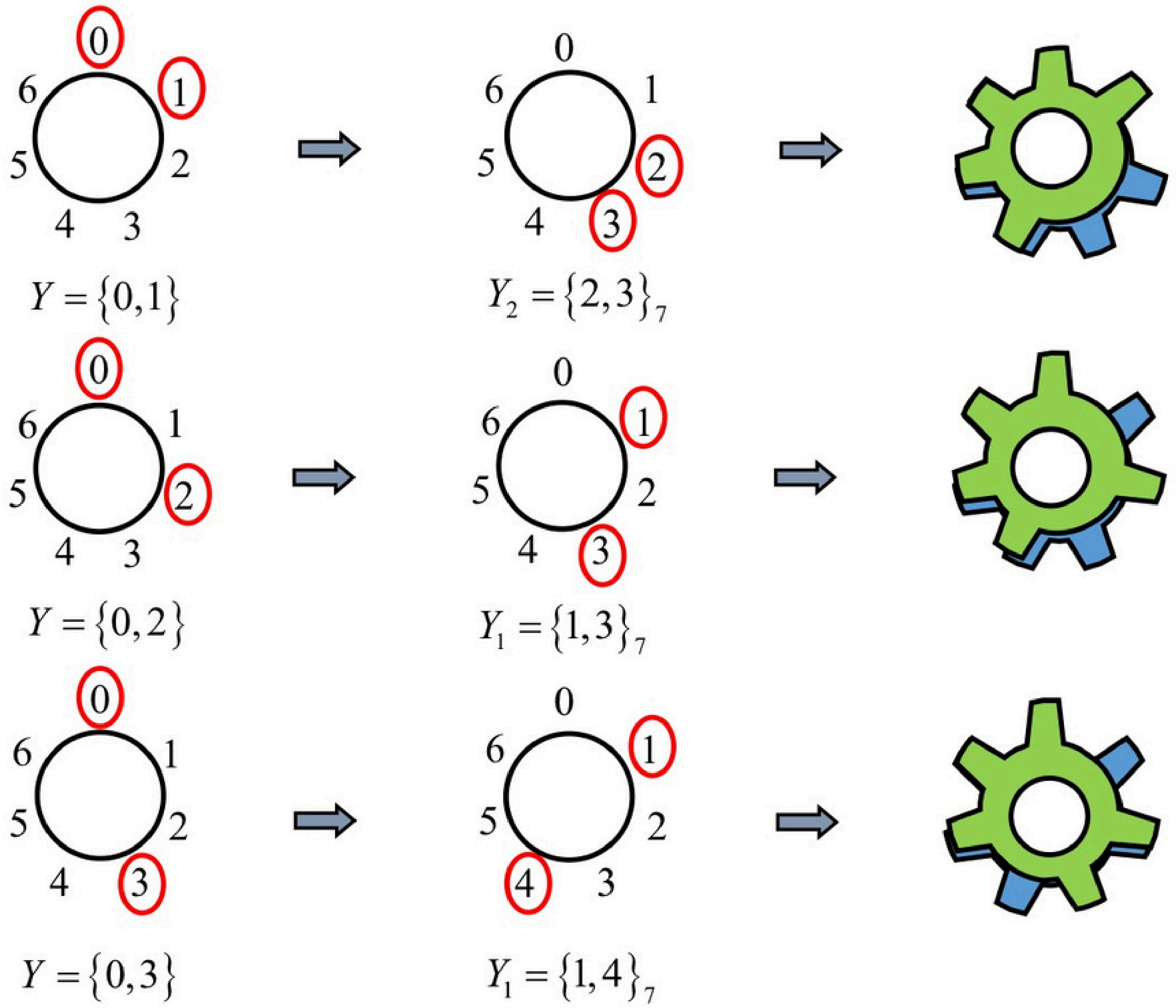


$Y=\{0,1,3\}$ 為6角齒輪的可行集合
$Y_1=\{1,2,4\}_6$
$Y_2=\{2,3,5\}_6$
$Y_3=\{3,4,0\}_6$
$Y_4=\{4,5,1\}_6$
$Y_5=\{5,0,2\}_6$

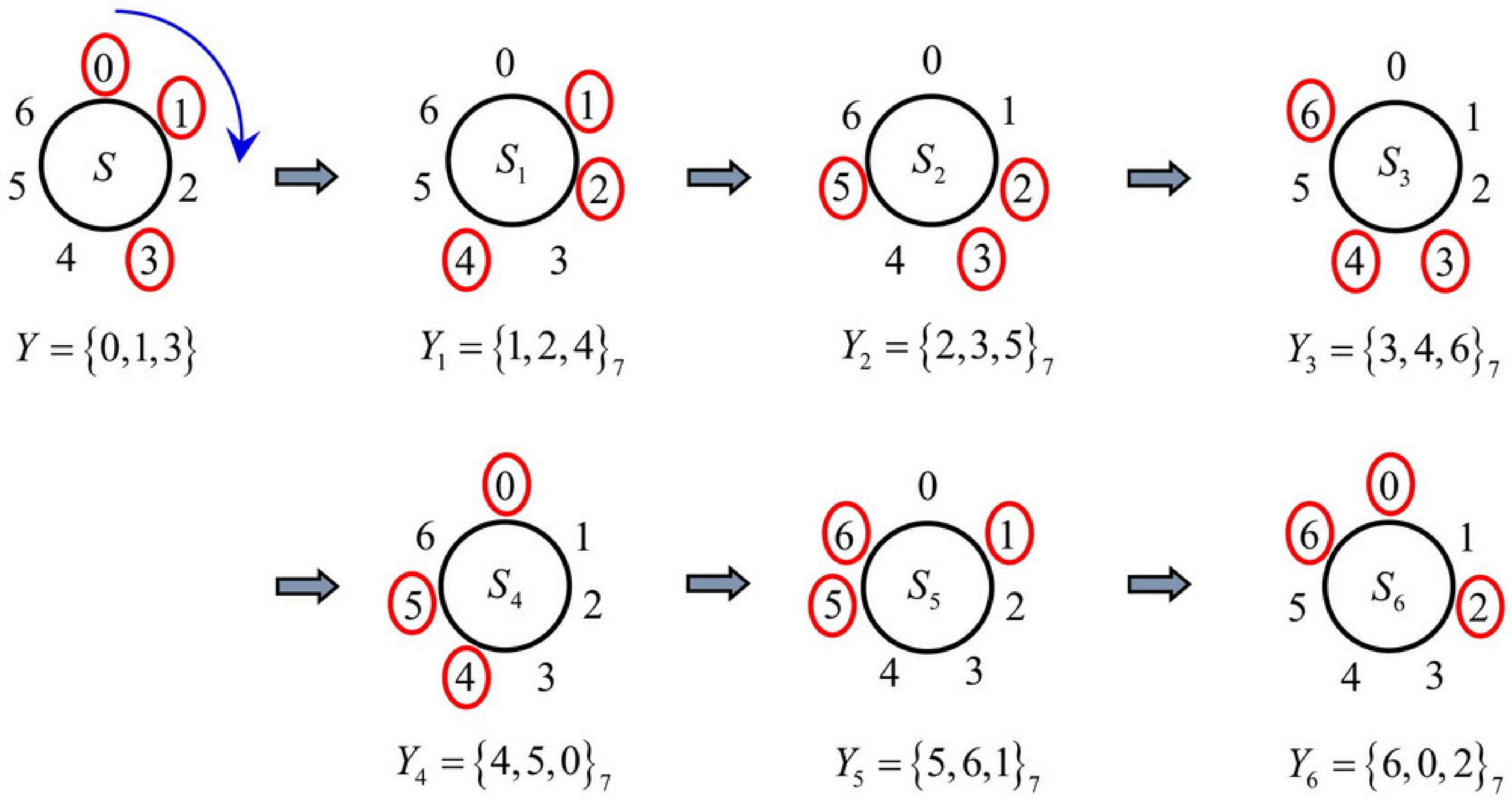


$Y=\{0,1,2\}$ 為6角齒輪的不可行集合
$Y_1=\{1,2,3\}_6$
$Y_2=\{2,3,4\}_6$
$Y_3=\{3,4,5\}_6$
$Y_4=\{4,5,0\}_6$
$Y_5=\{5,0,1\}_6$

最小可行數



(砍兩個轉到特定位置沒有缺口，
不可行)



(砍三個不管怎麼轉都有缺口，
且為「最小」可行)

策略一

考慮 11 角齒輪，首先將所有的角區分為兩段，位於編號 0 的角到最後一個砍去的角之間 的範圍稱為『前段』，而後方連續沒被砍去的角則稱為『後段』。令缺角集合為 Y = ⌧0,1,2,5⌧ ， 是從 0 開始順時針連續砍去編號為 0,1,2 的三個角，之後空下編號為 3,4 的兩格，最後再砍去 編號 5 的角。所以在這個砍法中，前段的範圍即為編號 0 1 5 , , , 的角，角數量為 6 ，後段的 範圍則為編號 6 7 10 , , , 的角。由於前段中沒有連續 3 個完好的角，因此當上層齒輪轉動 1,2, ,5 格時，其前段齒輪最初連砍的三個角必與下層齒輪缺角的位置有所重合，也就是兩齒 輪的水平投影必定有缺角，為不完整齒輪。 因為前段的齒輪角數 6 大於後段的齒輪角數 5 ，且前段齒輪為一開始先連續砍去 3 角，而 又沒有連續 3 個完好的角，所以當上層齒輪旋轉 6 7 10 , , , 格時，上層齒輪的前段會逐一經過 編號 0 的位置，且上層齒輪前段砍去的位置必與下層齒輪連續砍去的 3 角有所重合，也就是齒 輪的水平投影必定有缺角，為不完整齒輪。 可知，當使用上述策略的方式砍去 4 角時，可使 11 角齒輪在任何的旋轉狀態，其水平投 影皆有缺角，為不完整齒輪。意即集合 Y = ⌧0,1,2,5⌧ 為 11 角齒輪的可行集合。

策略一

可行集合的設計-策略一

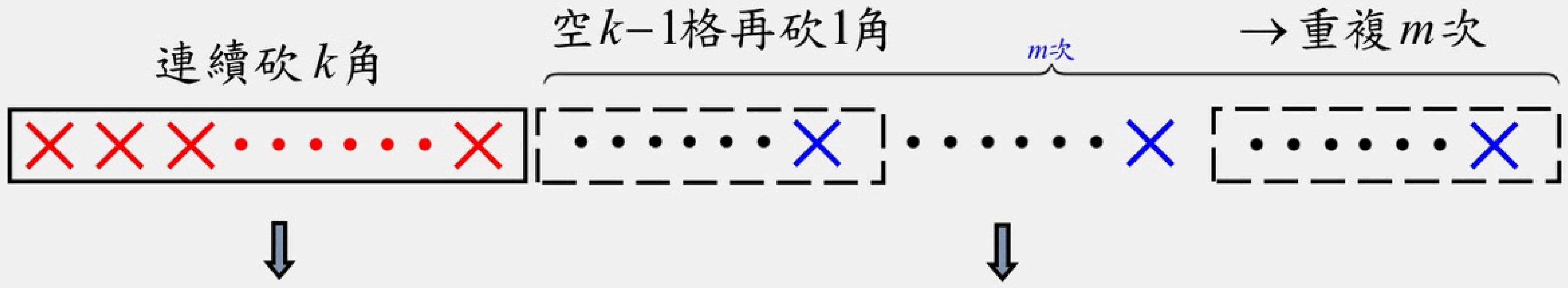
對於n角齒輪，以下兩步驟決定缺角集合$Y\subseteq\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，其中$k\geq 2$，$m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$：

Step-1：將編號$0,1,\cdots,k-1$這連續k個角砍去；

Step-2：由編號$k-1$的角開始，每空$k-1$格後砍去下一個角，重複m遍。

經過兩步驟所決定砍去的角集合為$Y=\{0,1,2,\cdots,k-1\}\cup\{k(i+1)-1:i=1,2,\cdots,m\}$。

其中令$Y_A=\{0,1,2,\cdots,k-1\}$，$Y_B=\{k(i+1)-1:i=1,2,\cdots,m\}$，故$Y=Y_A\cup Y_B$。



$Y_A=\{0,1,2,\cdots,k-1\}$　　$Y_B=\{k(i+1)-1:i=1,2,\cdots,m\}$　$\Rightarrow$　$Y=Y_A\cup Y_B$

策略一

以 11 角齒輪為例，根據 Theorem 1 的結論（1）

可知策略一所得的可行數 $y=\left\lceil \sqrt{2(n+1)}-1 \right\rceil$ n =11 代入可得 $y=\left\lceil 2\sqrt{6}-1 \right\rceil=4$

因此在策略一中存在一種砍去 4 個角的方式，可使其為可行集合，意即k+m= 4 。接下來將分析這砍去的 4 角應該如 何分配在 k 和 m 。若把 y = 4 代入 Theorem 1 的結論（2），可得 2 3 ⊠ ⊠ k ，因為 k 需為 自然數，所以 k = 2 和 k = 3 皆符合條件。

砍去4角的可行集合

$k=3$, $m=1$, $Y=\{0,1,2,5\}$ 0 1 2 3 4 5

$k=2$, $m=2$, $Y=\{0,1,3,5\}$ 0 1 2 3 4 5

策略二

可行集合的設計-策略二

對於 n 角齒輪，以下三步驟決定缺角集合 $Y \subseteq \{0,1,2,\cdots,n-1\}$，其中 k,m 皆為非負整數：

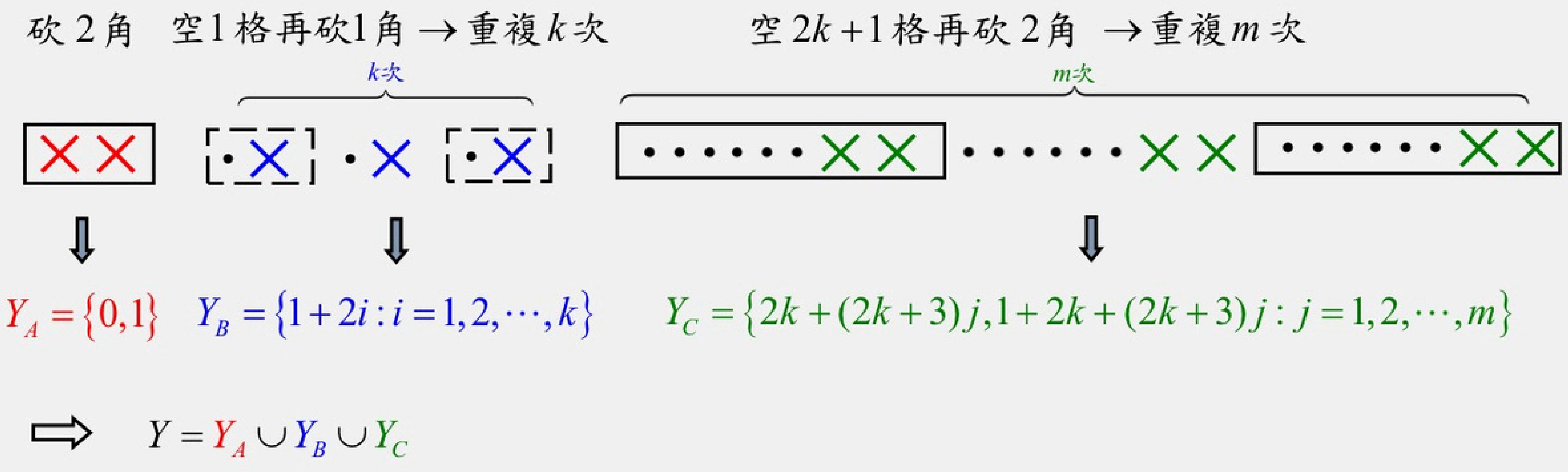
Step-1：將編號 0,1 這連續 2 個角砍去；

Step-2：由編號1的角開始，每空1格後砍去下一個角，重複 k 遍；

Step-3：由編號 $2k+1$ 的角開始，每連續空 $2k+1$ 格後砍去連續兩角，重複 m 遍。

令 $Y_A=\{0,1\}$，$Y_B=\{1+2i : i=1,2,\cdots,k\}$，$Y_C=\{2k+(2k+3)j, 1+2k+(2k+3)j : j=1,2,\cdots,m\}$。

經過三步驟所決定砍去的角集合為 $Y=Y_A \cup Y_B \cup Y_C$，其中 $|Y|=2+k+2m$。



研究結果

我為了找出n角齒輪的最小可行數$f(n)$，於是開始探討可行集合Y，並設計出兩種策略，其中$f_1(n)$和$f_2(n)$分別為策略一和策略二中可行集合的最小值。針對策略一的方法，發現$f_1(n)=\left\lceil \sqrt{2(n+1)}-1 \right\rceil$，從中設計出可行集合$Y$。由齒輪順逆時針旋轉的對稱性，發覺檢驗過程只要旋轉半圈即可，接著我引進距離數列的概念，從中優化策略一，設計了策略二，從中得知$f_2(n)=\left\lceil \sqrt{4\left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil-\frac{3}{2}} \right\rceil$，設計出可行集合$Y$。因為有了距離數列的概念，我最後想探討完美可行集合的可能性，雖然目前尚未歸納出完美可行集合的一般設計方法，期待之後對於所有n角齒輪，能夠過系統性的操作找出其最小可行集合。針對特定的n角齒輪，我建立一個充分條件，確定其不存在完美集合。此外，透過完美集合的概念，我得到一個最小可行集合的下界$\left\lceil \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} \right\rceil$。

實際應用

將n角齒輪代數化之後，每個角即可視為圓周上順時針分布的非負整數$0,1,2,\cdots,n-1$，而砍去的角即為$\{0,1,2,\cdots,n-1\}$的子集合Y，齒輪旋轉過後的缺角位置可視為缺角集合Y中的元素做加法運算，若順時針旋轉i格，則表示Y中的元素全部都加上i，因為元素始終在圓周上，所以這樣的加法運算必須考慮除以n後的餘數，在抽象代數中這些都可視為循環群$(\mathbb{Z}_n,+)$的運算問題，至於如何降低元素數量使得缺角集合Y滿足條件，這就是組合設計的範疇。可以意識到，這個研究問題，必須引進更多的代數學的數學知識才有可能有進一步的發展。

感謝收看！