數學思維與解題-3

組員:
數三乙 411131201 吳尚恩
數三乙 411131205 吳建億
數三乙 411131215 呂侑宸
數三乙 411131225 蔡宗翰
數三乙 411131233 邱証揚

一等獎-更高維法里數列存在性研究

1　研究動機

　　去年這研究主要是研究福特球，企圖用三顆互相相切的起始球開始不斷衍生球，觀察這些球的半徑，在研究時只研究出一些特例，如同一方向的衍生、固定一球的衍生，在校內科展時被評審說參考文獻功課做不足，有人做過相同的研究。當時正好是在發現固定一球中有研究突破點的時候，但我們無法說服評審這是報告中獨創的部分。

　　這個題目就被我放置著，但老師持續鼓勵我們繼續研究。繼續研究後，發現當初我們的預想沒有錯，固定一球的確是整份研究的突破點。最初還用舊方法慢慢找球心、同一方向衍生，但我們發現這樣新定義就失去了意義。此時重新檢視整份說明書，靈光乍現利用法里數列的性質，成功在三維研究作出重大發現，更打鐵趁熱，推廣到高維空間的研究，也得到超乎預期的成果。

一等獎-更高維法里數列存在性研究

2 研究目的

一 、找出三維空間中是否存在球體有類似福特圓的性質。

二、找出三維空間中的福特球是否與平面上的福特圓有關聯。

三、在三維空間中找出法里數列的對應形式。

四、將題目推廣到更高維的空間，並找出各維度之間的關聯。

三等獎-「世紀難題-考拉茲猜想」考拉茲猜想中循環的探討

1 研究動機

在昌爸工作坊上看到了一篇關於世紀難題-「考拉茲猜想」(Collatz conjecture) 的介紹，而對 於考拉茲猜想的運算，我們發現一個偶數經過數次除以 2 之後必定會變成一個比原本小的奇數 1，又在研發養成所上看到了有關考拉茲猜想可能出現的反例，因此引起了我們想研究這個主題的動機。

三等獎-「世紀難題-考拉茲猜想」考拉茲猜想中循環的探討

2

研究目的

一、考拉茲猜想的等價猜想

二、說明在進行考拉茲運算中$am+1$與am的大小關係

三、說明在進行考拉茲運算中an與$a0$的大小關係

四、證明在考拉茲運算中，除了 1-2-4 循環無其他循環

三等獎-分數的拆分

1 研究動機

我們在找專題研究的題目時，偶然地翻了森棚教官數學題的內容，我們試著去解一些題目，解完後，發現有更深入的問題可以研究，便開啟了這一份研究的內容了！

森棚教官數學題中的題目讓我們感到有興趣的有下列兩題，題目一：如果分母只能用偶數 表示的相異單位分數，要如何湊成1？ 最少需要幾項？ 題目二：如果分母只能用 2,5,8,11,14,17, ⋯ (即形如$3k+2$的正整數)的相異單位分數，要如何湊成 1？最少需要幾項？我們就想放寬分母的限制，例如：將拆分的數列從偶數、$3k+2$等數列的限制拔除：拆分的數列為正整數。

三等獎-分數的拆分

1 研究動機

從這兩個題目衍生出我們想要研究的問題，將上述問題中的限制移除後，我們發現每一個真分數都可以寫成數個相異單位分數的和，而每次將這些真分數寫成數個單位分數相加的時候都可以找到各種不同的寫法，進而得到不同的「拆分長度」，以 7/10 為例 ：7/10 = 2+5/2×5=1/2+1/5，也可以把它寫成7/10 = 3/10+2/5 = 1/3+1/5+1/10+1/15 。因此我想在這份研究計畫中找到對於任意的真分數b/a表示成數個相異單位分數的和的最短長度。等到研究的內容完備後，仿照題目1、題目2的要求，再重新加入限制條件，例如：拆分的數列為奇數、偶數或其他著名的數列，例如：費氏數列、等差數列。

三等獎-分數的拆分

2 研究目的

一、找出任意真分數的拆分使得拆分後的級數長度最短，找出len(b/a)固定a, b時的值，且找出len(b/a)的最小上界，其中$b<a$。

二、找出任意真分數的拆分在等差數列(公差不為 1)的限制下，求拆分的最短長度，並提供一個有效的演算法處理。即尋找 $\min\left\{ l \,\middle|\, \frac{b}{a} = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{x_k} \right\}$，其中$\langle xk \rangle$是一個形如$pn+q$的數列，其中$p \neq 1$，且$p$, q為互質的固定正整數。

三、找出任意正有理數的拆分使得拆分後的級數項數最短，即將研究目的(一)推廣到一般的正有理數，以及將研究目的(二)推廣到一般的正有理數。

四等獎-頂心三角形誕生的奇蹟

1 研究動機

我們看完第59屆科展作品後，我們暸解了如果由原三角形三頂點為圓心，頂點到垂心（內心、外心）之距離為半徑畫圓，三圓交點形成一新三角形，原三角形之垂心（內心、外心）會 成為新三角形之內心（外心、垂心），因此我們想要探討這個性質的延伸，討論三角形之間的 面積比例關係，並進一步探討若是由三角形三頂點為圓心，頂點到三角形內任意一點為半徑畫 圓，三圓交點形成一新三角形，此新三角形會有什麼性質。

四等獎-頂心三角形誕生的奇蹟

2 研究目的

一、探討 ABC與其頂心三角形 EFG之相關性質。

二、研究 ABC與其頂心三角形 EFG邊長關係及面積比例關係。

三、探討頂心線相關性質。

四等獎-破解清空盒子彈珠的最佳途徑

1 研究動機

一開始解題時，我們是利用樹狀圖一一列出 A 盒裝有22顆彈珠時的所有可能性求解，過程中，我們發現最少操作次數時 B 盒最終彈珠數及操作方法數不只1種，我們想確定此情況是否為特例，故我們打算列出其他彈珠數的情況，但畫樹狀圖方法太費時，且當 A 盒的彈珠 數量增加，最少操作的次數也會增加，因此我們想要找出其中的規律性，求出一般化的解。除了原題目的問題，我們好奇增加顏色的情況下是否對最少操作次數有影響，因此我們嘗試 將彈珠顏色從1種增加為n種，試著求出一般化的解。

四等獎-破解清空盒子彈珠的最佳途徑

2

研究目的

一、探討清空A盒彈珠所需的最少操作次數，並將結果一般化。

二、探討在清空A盒彈珠的最少操作次數下， B 盒的最終彈珠數量，並將結果一般化。

三、探討在清空A盒彈珠的最少操作次數下，清空盒內彈珠的方法數，並將結果一般化。

四、探討A盒有相同數量的紅、白兩色彈珠時，清空盒內彈珠所需的最少操作次數，並將結果一般化。

五、探討在清空 A 盒相同數量的紅、白兩色彈珠的最少操作次數下， B 盒的最終紅、白彈珠數量，並將結果一般化。

六、推廣 A 盒有相同數量的多色彈珠時，清空盒內彈珠所需的最少操作次數一般化結果。

七、推廣 A 盒有相同數量的多色彈珠時，最少操作次數下 B 盒中各顏色最終彈珠數量一般化結果。

三等獎-坐標平面上的格點多邊形性質

1 研究動機

在國中的資優班的複選中，有一道題是判斷「在特定的矩形範圍內共有多少格點直角三角形（所有頂點皆落在格子點上）」，當時我就想著能否導出一個通解，可以利用範圍及多邊形邊數，求出三角形的各項性質，但以失敗告終。之後我查到，有許多科展主題皆是探討 格點正方形]或直角三角形在特定範圍內的種類與個數，但是沒有人推廣到其他的多邊形，還有學者用程式去預測當多邊形邊數很多（或範圍很大時）的估計值，我認為這些工作應該存在更數學化的方法，以函式簡潔且精確地表示。因此本研究將會研究坐標平面上的各種凹多邊形及凸多邊形，也就是簡單多邊形的性質，並嘗試推導出下列通解。

三等獎-坐標平面上的格點多邊形性質

2 研究目的

一、求坐標平面上特定矩形範圍內的格點多邊形之邊數極值。

二、求坐標平面上特定矩形範圍內有足夠格點連成格點多邊形的條件式。

三、求坐標平面上特定矩形範圍內的格點多邊形之面積極值。

四、求坐標平面上特定矩形範圍內的格點多邊形之周長極值。

五、求坐標平面上特定矩形範圍內的格點多邊形之個數極值。

三等獎-坐標平面上的格點多邊形性質

3 研究方法-名詞定義

一、邊數k：格點多邊形（每個頂點皆為格子點，含凸k邊形與凹k邊形）的邊數。

二、範圍(n, m)：由$x = n$、$y = m$、x軸、y軸圍成的$n \times m$矩形範圍($(n, m) \in \mathbb{N}$)。

三、$max(a, b)$：a與b之間較大者($(a, b) \in \mathbb{N}$)。

四、$min(a, b)$：a與b之間較小者($(a, b) \in \mathbb{N}$)。

五、線段$l(a, b)$：坐標平面上斜率為$\pm a$或$\pm 1/a$，且長b單位的線段($a \in \mathbb{Z}$，$b \in R$, $b>0$)。

六、函式$LED(n, m)$：(n, m)範圍內，格點多邊形的邊數極大值。

七、函式$SED(n, m)$：(n, m)範圍內，格點多邊形的邊數極小值。

三等獎-坐標平面上的格點多邊形性質

研究方法-名詞定義

八、函式$JM(k, n, m)$：有足夠格點連成格點k邊形的(n, m)條件判斷式。

九、函式$LAR(k, n, m)$：(n, m)範圍內，格點k邊形的面積極大值。

十、函式$SAR(k, n, m)$：(n, m)範圍內，格點k邊形的面積極小值。

十一、函式$LPM(k, n, m)$：(n, m)範圍內，格點k邊形的周長極大值。

十二、函式$SPM(k, n, m)$：(n, m)範圍內，格點k邊形的周長極小值。

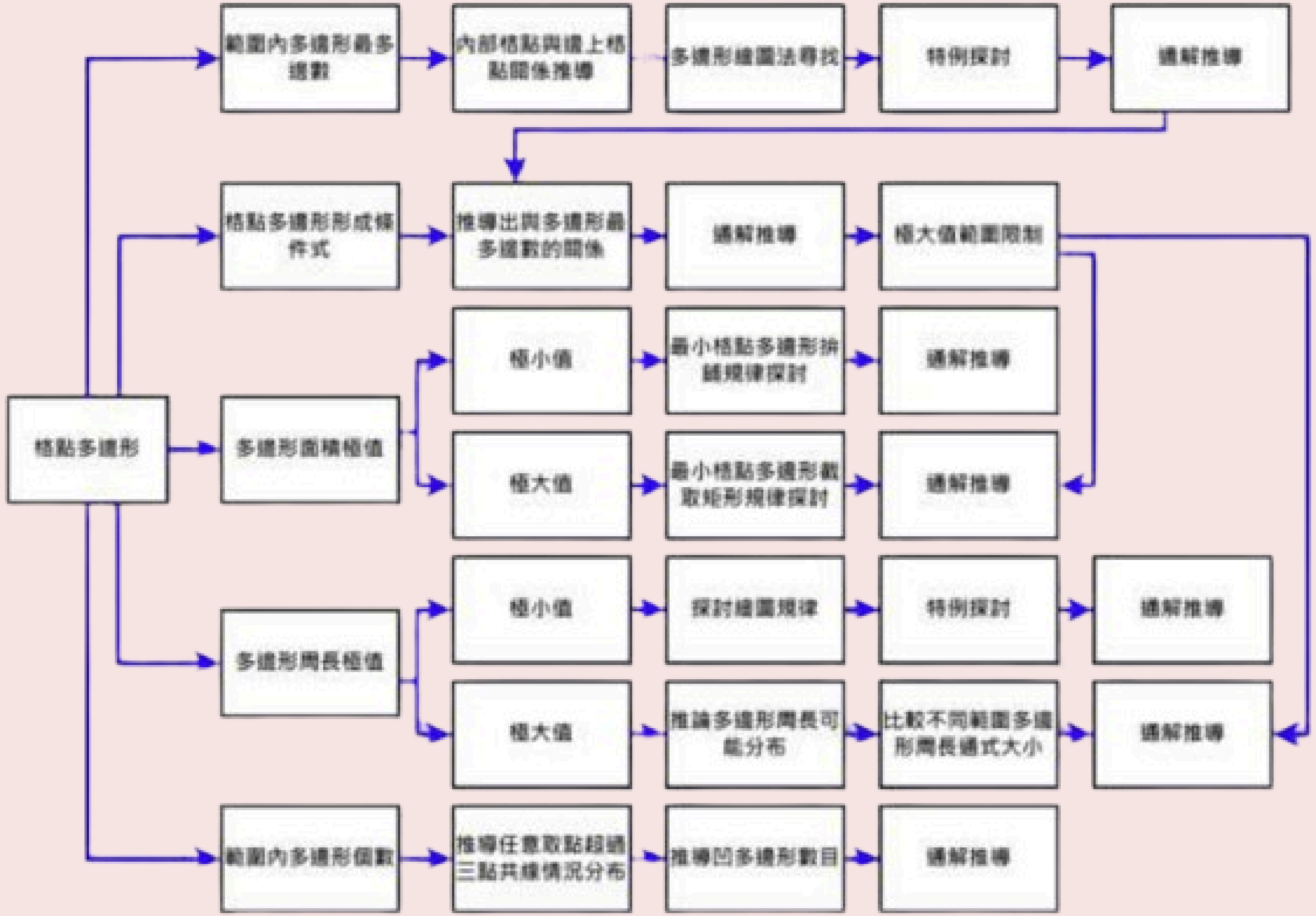
十三、函式$LAM(k, n, m)$：(n, m)範圍內，格點k邊形的個數極大值。

十四、函式$SAM(k, n, m)$：(n, m)範圍內，格點k邊形的個數極小值。

三等獎-坐標平面上的格點多邊形性質

4

研究架構與流程



三等獎-坐標平面上的格點多邊形性質

5 研究結果

經過長期研究後，我們成功使用數學化的方式推導出了(n, m)範圍內的格點多邊形邊數極值通解、有足夠格點連成格點k邊形的(n, m)條件判斷式、(n, m)範圍內格點k邊形的面積極值通解，以及(n, m)範圍內格點k邊形的周長極小值通解，整理羅列如下。

三等獎-坐標平面上的格點多邊形性質

5 研究結果

一、(n,m)範圍內的格點多邊形之邊數極值通解

（一）極大值

條件	通解
$min(n,m)=1$	$LED(1,p)=LED(p,1)=4$
$min(n,m)=2$	$LED(2,p)=LED(p,2)=3(p+1)-2$
$min(n,m)=3$	$LED(3,p)=LED(p,3)=4(p+1)$
$min(n,m)\geq 4$	$LED(n,m)=4+\left[\frac{2\,min(n,m)}{min(n,m)+2}\right]\left((n+1)(m+1)-4-2\left[\frac{4}{min(n,m)+2}\right]-\left[\frac{8}{min(n,m)+4}\right]\left[\frac{2min(n,m)}{min(n,m)+4}\right]\right)$

(二)極小值

$$SED(n,m)=3$$

三等獎-坐標平面上的格點多邊形性質

5 研究結果

二、(n,m)範圍內有足夠格點連成格點多邊形的條件式

$$JM(k,n,m) = \left\lfloor \frac{2k}{LED(n,m)+k} \right\rfloor$$

三、(n,m)範圍內的格點多邊形之面積極值通解

（一）極大值

$$LAR(k,n,m) = \left(nm - \frac{k-4}{2} - \left(\frac{nm-k+4}{2}\right)\left\lfloor \frac{6}{k+3} \right\rfloor\right) \times JM(k,n,m)$$

（二）極小值

$$SAR(k,n,m) = \frac{k-2}{2}$$

三等獎-坐標平面上的格點多邊形性質

5 研究結果

四、(n,m)範圍內的格點多邊形之周長極值通解

（一）極大值

邊數	通解
$k=3$	$LPM(3,n,m)=\left(n+m+\sqrt{n^2+m^2}\right)\times JM(k,n,m)$
$k=4$	$LPM(4,n,m)=\left(2n+2m+\left[\frac{2max(n,m)}{max(n,m)+5}\right]\left(D_1(n,m)+\left[\frac{2min(n,m)}{min(n,m)+3}\right]D_2(n,m)-2n-2m\right)\right)\times JM(n,m)$
$k=5$	$LPM(5,n,m)=\left(\left[\frac{2min(n,m)}{min(n,m)+2}\right]E_1(n,m)+\left[\frac{2min(n,m)}{min(n,m)+3}\right]E_2(n,m)\right)\times JM(n,m)$

（二）極小值

$$SPM(k)=2k-4-4\left[\frac{k-1}{4}\right]+\left(4+4\left[\frac{k-1}{4}\right]-k\right)\sqrt{2}+\left[\frac{2k}{k+8}\right]\left[\frac{16}{k+8}\right](2\sqrt{2}-2)$$

三等獎-坐標平面上的格點多邊形性質

5 研究結果

五、(n,m)範圍內的格點多邊形之個數極值通解

（一）極大值

邊數	通解
$k=3$	$LAM(3,n,m)=C_3^{(n+1)(m+1)}-(n+1)C_3^{(m+1)}-(m+1)C_3^{(n+1)}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(gcd(n,m)-1)(n+1-i)(m+1-j)$

（二）極小值

$$SAM(k,n,m)=0$$

謝謝大家