數學思維與解題

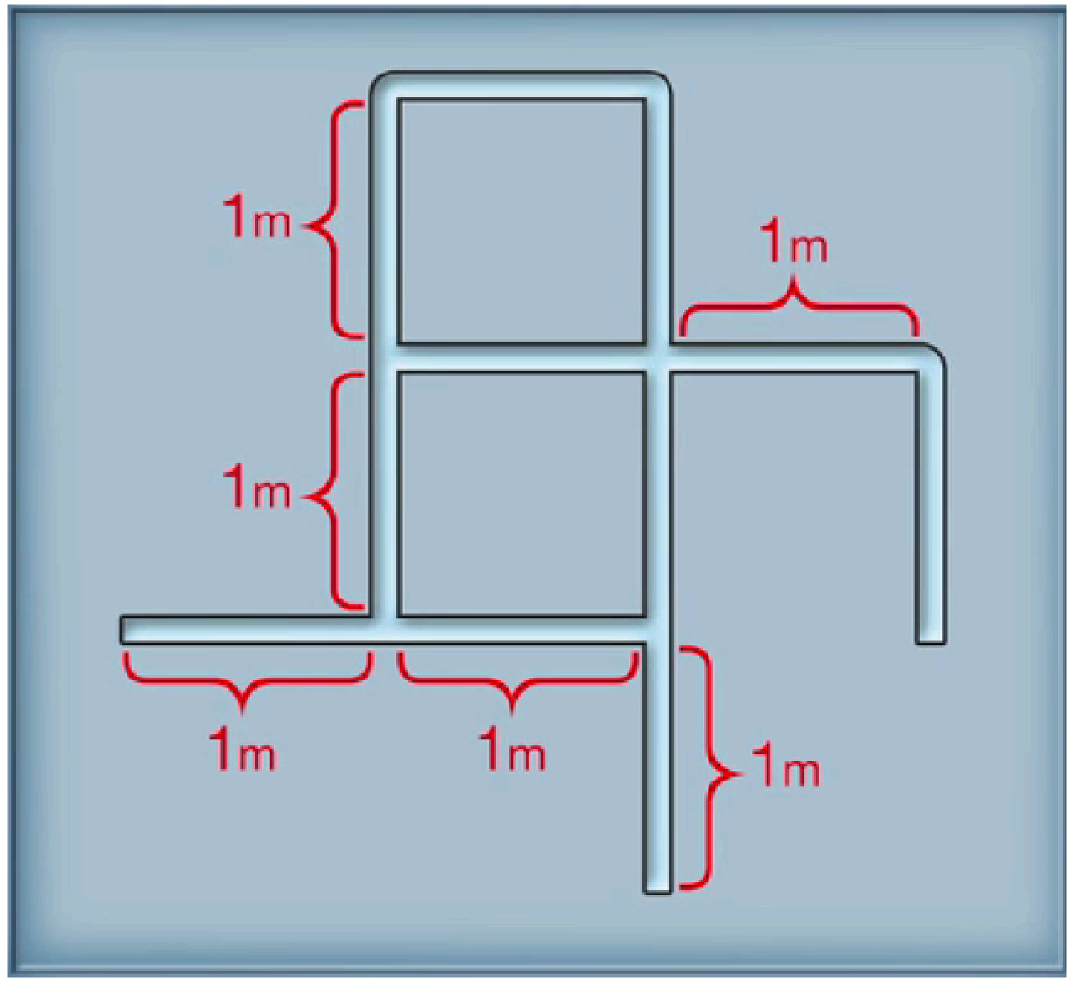
第四組

2021年科展

411031112 吳昱澄
411031217 周昱凱
411031218 林展鳴
411031226 林宜鋒
411031227 張炘偉

一等獎：m×n 圖改造成一座森林的探討

一、研究動機



在Ted網站上有一部影片上說到一個問題：有一管子如下圖，
管子中有一些螞蟻在行進， 螞蟻行進的規則有4個：

1. 行進的速率固定每分鐘走1公尺。
2. 不會走出這一管子且只會向前走或轉彎，且只有遇到岔路、 螞蟻或前面沒路時才會轉彎。
3. 遇到岔路時會瞬間隨機走一條岔路。
4. 遇到螞蟻時兩隻螞蟻都會瞬間轉180度往回走，沒路時也會瞬間轉180度往回走。

現在有2個吸螞蟻的裝置，只有當螞蟻走到吸螞蟻的裝置下時才會被吸走，求吸螞蟻的裝置要放在哪會使得不論任一螞蟻初始位置和面相方向為何 都會在4分鐘內就被吸走。

當去掉時間的限制後，其實也就是在問使圖中沒有環的取點法，那如果將圖改成 G(m,n) 方格街道，則最少需要幾個吸螞蟻的裝置？以及有哪些策略來進行這些吸螞蟻裝置的配置呢？

本問題引起我研究的動機，想試圖找出一些策略，了解在 m x n 的格狀街道中，最少應該放入幾個吸螞蟻的裝置，便保證能抓到所有螞蟻。一開始我發現這問題等價於在圖 G(m, n) 中，最少應放入幾個紅點後，便能使 G 中得所有環都能碰到至少一個紅點。經過一兩個月的摸索與討論，發現更等價於在圖 G(m,n) 中，最少應扣除幾個點後，便可形成一森林。因此本研究將致力於找紅點與森林之間的關係，並從中整理出一些有效的判斷方式。

二、研究目的

原始想解決的問題為：「給定 m x n 的格狀街道，找到最少放置吸螞蟻的裝置數，及其放置策略。」

我們選擇以離散圖論的觀點來進行分析，並應用於配置最少的裝置，以最低成本的策略抓到所有螞蟻。基於此，本研究目的為：

(一) 找到原始問題的等價問法。

(二) 探討形成森林的相關性質。

1. 找到適合本研究所需要的名稱定義與數學工具。
2. 找到判斷樹與森林的性質。
3. 估計出最佳紅點數的上界與下界。

(三) 探討圖 G(n) 的最佳解 k(n)

1. 研究 n 較小時的最佳解結構。
2. 研究 k(n) 是否具備遞迴關係或特殊結構。

(四) 探討圖 G(m,n) 的最佳解 k(m,n)

1. 固定 m，研究 n 較小時的最佳解結構。
2. 固定 m，研究 k(m,n) 是否具備遞迴關係或特殊結構。

(五) 探討無限擴張的格狀街道

1. 了解圖形的結構與密度。
2. 找到有用的訊息來說明 k(n) 與 k(m,n)。

<u>二等獎</u>：多邊形的剖分圖形數量之探討

一、研究動機

　對於一個凸 $n+2$ 邊形而言，能將其剖分成 n 個三角形的三角剖分圖形數量即為卡特蘭數 c_n。

　因此，我想要探討把多邊形剖分成多個三角形和其他多邊形的圖形數量為何。例如，探討把多邊形剖分成一個四邊形和多個三角形、把多邊形剖分成一個五邊形和多個三角形、把多邊形剖分成兩個四邊形和多個三角形，再從中推導並一般化到計算「把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+2$ 邊形和多個三角形」的剖分圖形數量，「把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+2$ 邊形、一個 $m+2$ 邊形和多個三角形」的剖分圖形數量，「把 $n+2$ 邊形剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、 一個 k_3+2 邊形、和 $n-k_1-k_2-k_3$ 個三角形」，以及「把 $n+2$ 邊形剖成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、一個 k_3+2 邊形、一個 k_4+2 邊形和 $n-k_1-k_2-k_3-k_4$ 個三角形」的剖分圖形數量。

二、研究目的

(一)、 探討利用 n-2 條不相交的對角線把 n+2 邊形剖分成一個四邊形和 n-2 個三角形的圖形總數量 $a_{(n,2)}$ 與卡特蘭數 c_n 的關係，並找出 $a_{(n,2)}$ 的一般式。

(二)、 探討利用 n-3 條不相交的對角線把 n+2 邊形做剖分，產生的圖形(一個五邊形和 n-3 個三角形的圖形、兩個四邊形和 n-4 個三角形的圖形與三角剖分圖形的關係，並找出圖形數量 $a_{(n,3)}$ 、 $a_{(n,2,2)}$ 和卡特蘭數 c_n 的關係。

(三)、 探討利用 n-3 條把 n+2 邊形剖分成一個五邊形和 n-3 個三角形的圖形總數量 $a_{(n,3)}$ 的一般式及把 n-2 邊形剖分成兩個四邊形和 n-4 個三角形的圖形總數量 $a_{(n,2,2)}$ 的一般式。

(四)、 探討利用把 n+2 邊形剖分成一個 k+2 邊形和 n-k 個三角形的圖形總數量的一般式。

(五)、 探討把 n+2 邊形剖分成一個 k+2 邊形、一個 m+2 邊形和 n-k-m 個三角形的圖形總數量的一般式。

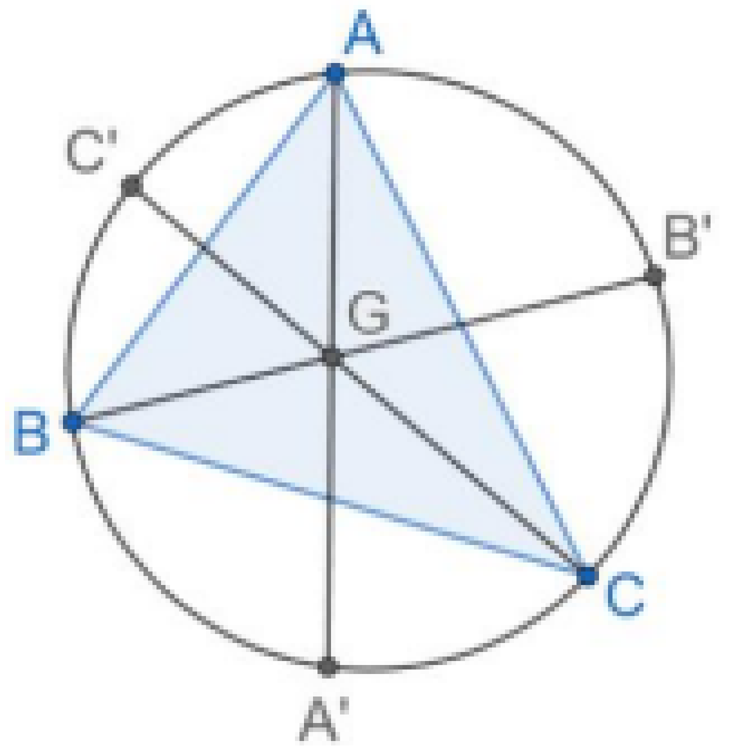
(六)、 探討把 n+2 邊形利用不相交的對角線剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、一個 k_3+2 邊形、和 n-k_1-k_2-k_3 個三角形的剖分圖形數量。

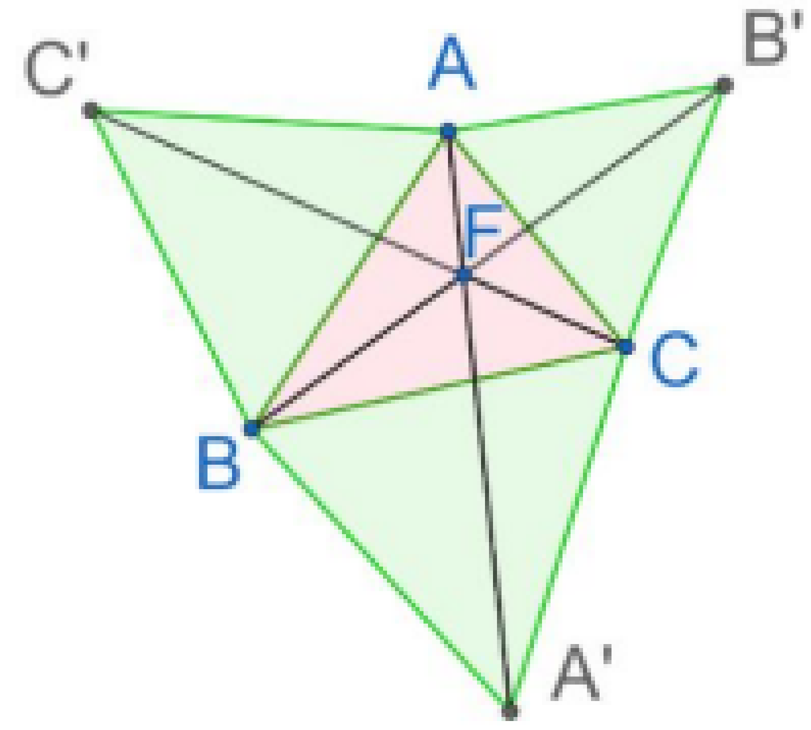
(七)、 探討把 n+2 邊形剖成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、一個 k_3+2 邊形、一個 k_4+2 邊形和 n-k_1-k_2-k_3-k_4個三角形的剖分圖形數量。

三等獎：圓例覺醒 –

一、研究動機

於 2017 年國際科展[1](石博允、錢昀，2017)提到「任意給定 ABC 與其外接圓 O 和重心 G ， 若 $\overline{AG}$、$\overline{BG}$ 、$\overline{CG}$ 分別交 O 於 A'、B'、C'，則 $\frac{\overline{AA'}}{\overline{GA'}}+\frac{\overline{BB'}}{\overline{GB'}}+\frac{\overline{CC'}}{\overline{GC'}}=6$」。讓我們很驚艷三角形的 衍生線段有如此特殊的比值相加關係，恰巧當時數學課在介紹費馬點，費馬點、兩個頂點和衍生點有著四點共圓的關係，於是我們用 GGB 觀察，並更改比值為「相乘」關係，發現任意給定三內角都小於 120°的三角形ABC ，透過算幾不等式可得 $\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\geq 8$ ，這引起了我們很大的好奇，其他特殊點是否也有這個不等式。





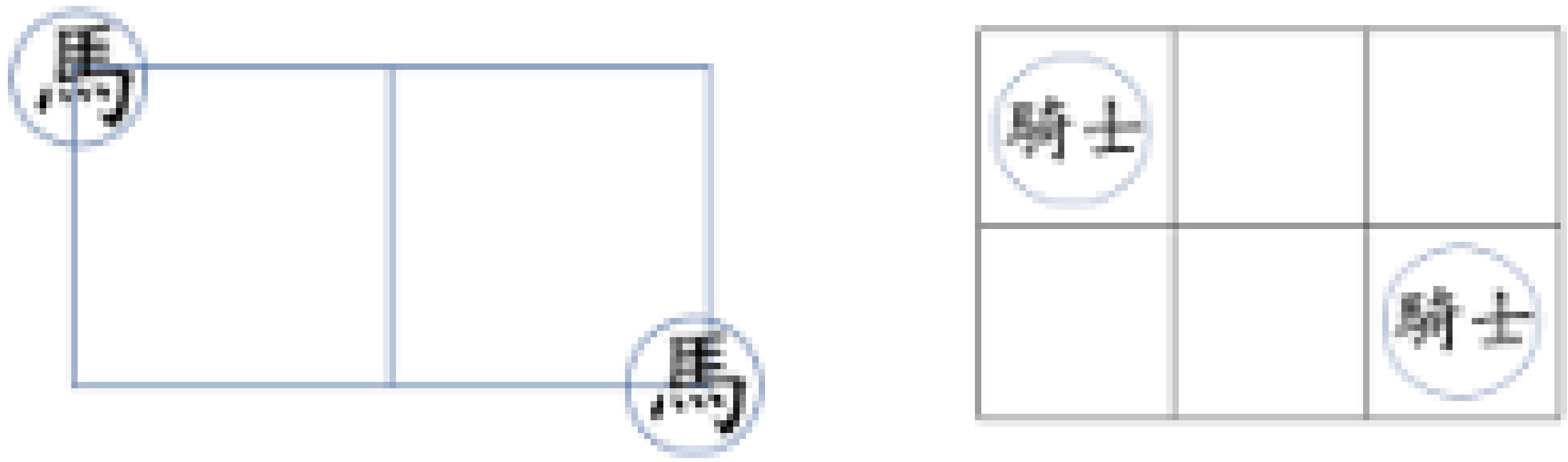
二、研究目的

1. 嘗試用多種方法來探討當三角形內的點為費馬點、外心、內心、垂心、重心等特殊點時之比值與極值為何？並將範圍延伸至任意點。
2. 將二維延伸至三維、n 維空間，並探討其特性。
3. 找出其他特殊比值的極值，並證明之。

三等獎：「馬道」成功

一、研究動機

我們參加了學校的棋藝社，某次老師講解棋子的走法時，發現象棋的馬與西洋棋的騎士走法有異曲同工之妙，如(圖二)，並發現棋子的走法似乎有些特殊的規律，兩者的走法我們稱為同構。為了書寫作業方便，我們採用騎士的走法來完成我們的研究之旅。



(圖二) 馬步與騎士

二、研究目的

(一) 探討馬步以原點為起點可否到達平面棋盤上的任意格子點。

(二) 探討任意馬步路徑可否在第一象限(含軸)內找到等長的對應路徑。

(三) 探討每一個最少步數K所對應的總格子數 $f(K)$，數列 $<f(K)>$ 是否有規律性。

(四) 探討由原點到任意點的最少步數。

三等獎 :多維度空間中隨機漫步回到原點之方法數探討

一、研究動機

在高一數學課學到排列組合的章節時，老師曾在黑板上寫下了這個有趣的問題：

有一隻青蛙位於坐標平面的原點，每步隨機朝上、下、左、右跳一單位長。
請問：(1)青蛙跳了四步後恰回到原點有幾種走法?
(2)跳了八步後回到原點有幾種走法?

改編自<106年學測>

而在解題的過程中，我無意中注意到青蛙在二維平面與單一直線上的走法數恰好成平方數的關係，對於這樣的發現，我也開始好奇若將步數推廣到更多步，或是將維度推廣到更多維空間，又或者改變移動終點的位置時，是否會有特定的方法數公式，並試圖找到回到原點漸近式，研究不同維度間的關係式。

二、研究目的

我們的研究目的如下:

一、探討青蛙在單一直線、二維平面、三維空間上移動特定次數回到原點的方法數。

二、探討青蛙在單一直線、二維平面、三維空間上移動特定次數到達特定點的方法數。

三、探討青蛙在不同維度中移動相同次數與回到原點的方法數之間的關係。

四、透過參考之數學模型探討青蛙在不同維度中移動任意次數回到原點之方法數漸近線。

五、探討青蛙在二維平面有限範圍內，移動特定次數回到原點的方法數。

四等獎：水流曲面與初始物理量值關係之研究

一、研究動機

一日在倒水時，發現若是從水龍頭落下的水柱在水流快慢不同，就會呈現不同的曲面，同時觀察到水在流下一定距離後會不再連貫，變成一顆顆的水珠，於是我開始思考：水柱的曲面型態會受甚麼因素影響呢？水珠生成的位置又會受甚麼因素影響呢？為了解答心中的疑惑，便以理想狀態下，以數學形式模擬水柱的表面(曲面)，並計算其曲率以更精準觀察曲面在不同高度的變化；並分析各變數(初始速度、初始半徑、重力)對此曲面的影響。

二、研究目的

一、利用初速度 $v0$、初半徑 $r0$、重力加速度 g，求曲面函數。

二、計算其函數曲率，並比照各物理量變化對其影響。

三、利用曲面對稱於 z 軸的特性，將此曲面轉換為一 x–z 平面上曲線(此曲線以 z 軸作旋轉即可得到原曲面)並探討此曲線的曲率變化

我們要講解的作品是：

<u>m×n圖改造成一座森林的探討</u>

名詞介紹

性質 3： A,B 為圖 G 中兩點，
若圖 G 中有兩條不同的路徑 P,Q 且 $P,Q\in Path(A,B)$，則 $P\cup Q$ 中有環。

性質 4： 若連通圖 G 中有一環 C，邊 e 為 C 中任一邊，則 $G-\{e\}$ 為連通圖。

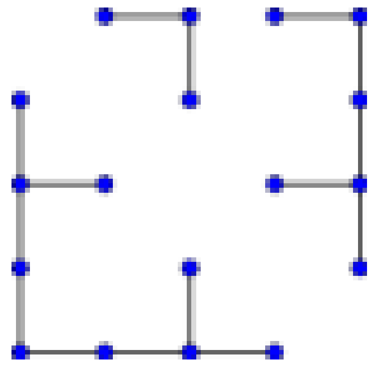
(九) 森林

若圖 G 中沒有環，則我們稱圖 G 為一座**森林**。例如如圖 G_{26} 即為一座森林。

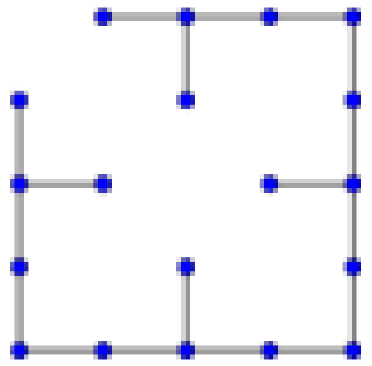
(十) 樹

若圖 G 中沒有環且為一連通圖，則我們稱圖 G 為一棵**樹**，顯然 $\omega(G)=1$。特別地，若圖 G 為一棵樹，則圖 G 也是一座森林。如圖 G_{27} 為一棵樹，也為一座森林。

另外，圖 G_{26} 為一座森林，此森林連通塊的數量為 3，且每個連通塊皆為一棵樹，即圖 G_{26} 為一座擁有 3 棵樹的森林。



[圖 G_{26}]



[圖 G_{27}]

性質 2： ① A 為圖 G 中一點，則 $|V(G-\{A\})|=|V(G)|-1$。

② $A_1, A_2, \ldots, A_i$ 為圖 G 中 i 個相異點，則 $|V(G-\{A_1, A_2, \ldots, A_i\})|=|V(G)|-i, \forall i \in \mathbf{N}$。

③ e 為圖 G 中一邊，則 $|V(G-\{e\})|=|V(G)|$ 且 $|E(G-\{e\})|=|E(G)|-1$。

④ $e_1, e_2, \ldots, e_i$ 為圖 G 中的 i 個相異邊，

則 $|V(G-\{e_1, e_2, \ldots, e_i\})|=|V(G)|$ 且 $|E(G-\{e_1, e_2, \ldots, e_i\})|=|E(G)|-i, \forall i \in \mathbf{N}$。

性質 8： $|V(G(m,n))|=(m+1)(n+1)$， $|E(G(m,n))|=m(n+1)+n(m+1)$，

$|V(G(n))|=(n+1)^2$， $|E(G(n))|=2n(n+1)$。

回到本研究核心問題：「$G(m,n)$ 最少應扣除多少點後，即可形成一森林？」，我們將此點數記作 $k(m,n)$，此時將所有扣除的點均染上**紅點**，並蒐集成一集合，稱為 $G(m,n)$ 的一組最佳解。我們把所有上、下、左、右互相對稱的 $G(m,n)$ 最佳解視為同一種，再把所有的 $G(m,n)$ 最佳解蒐集成一集合，記作 $X(m,n)$，當 $m=n$ 時 $k(m,n)$ 簡記作 $k(n)$、$X(m,n)$ 記作 $X(n)$。

設 $x \in X(m,n)$，根據性質 9 得知 $G(m,n)-x$ 為森林，根據[定理 2]得知

$$|V(G(m,n)-x)|=|E(G(m,n)-x)|+\omega(G(m,n)-x)\ (*)，$$

為求方便，我們定義 $e'(m,n) := |E(G(m,n))| - |E(G(m,n)-x)|$，即 $G(m,n)-x$ **時** x **的總佔邊數**，當 $m=n$ 時記為 $e'(n)$。

根據性質 2 得知 $|V(G(m,n)-x)|=|V(G(m,n))|-|V(x)|=|V(G(m,n))|-k(m,n)$，

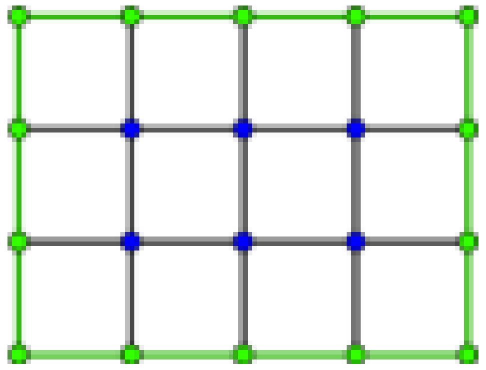
根據性質 8 得知 $|V(G(m,n))|=(m+1)(n+1)$ 且 $|E(G(m,n))|=m(n+1)+n(m+1)$，

將其代入(*) $|V(G(m,n))|-k(m,n)=|E(G(m,n))|-e'(m,n)+\omega(G(m,n)-x)$

$$\Rightarrow mn+m+n+1-k(m,n)=2mn+m+n-e'(m,n)+\omega(G(m,n)-x)$$

$$\Rightarrow e'(m,n)=mn+k(m,n)+\omega(G(m,n)-x)-1\ (**)，$$

因為一個紅點最多佔4邊，所以$e'(m,n)\le 4k(m,n)$ (***)，等號成立時x中的每個紅點都要佔4邊。因為$G(m,n)-x$不能有環，所以$G(m,n)$的最外圍那環(即圖G_{41}綠色處)至少要有一點被拿掉，所以x中至少有一個點所佔的邊數少於4。



[圖 G_{41}]

因此(***)的等號不會成立，可改成$e'(m,n)\le 4k(m,n)-1$(****)。

由(**),(****)可知$mn+k(m,n)+\omega(G(m,n)-x)-1=e'(m,n)\le 4k(m,n)-1$。

因此將以上的結果，整理成[定理 3]。

[定理 3] 設$x\in X(m,n)$，則$mn+k(m,n)+\omega(G(m,n)-x)-1=e'(m,n)\le 4k(m,n)-1,\forall m,n\in\mathbf{N}$，等號成立時$m\times n$最佳解中的點中，1個紅點佔3邊、其他紅點佔4邊。

由[定理 3]可知 $mn+k(m,n)+\omega(G(m,n)-x)-1\le 4k(m,n)-1$，

將上式移項化簡後可得 $3k(m,n)\ge mn+\omega(G(m,n)-x)\ge mn+1$，

也就是說 $k(m,n)\ge \dfrac{mn+1}{3}$ (*****)，等號成立時 $G(m,n)-x$ 為連通圖且 x 中有 $k(m,n)-1$ 個紅點佔 4 邊、最外圍只有一個紅點佔 3 邊。

因為 $k(m,n)\in \mathbf{N}_0$，所以(*****)可改成 $k(m,n)\ge \left\lceil \dfrac{mn+1}{3} \right\rceil$，

說明：$\lceil x \rceil$ 表示大於等於 x 的最小整數，即$\lceil\ \ \rceil$為上高斯符號。因此得到以下的[定理 4]，並提供了 $k(m,n)$ 的一個下界。

[定理 4] $k(m,n)\ge \left\lceil \dfrac{mn+1}{3} \right\rceil, \forall m,n\in \mathbf{N}$ 。

若 $k(m,n)=\left\lceil \dfrac{mn+1}{3} \right\rceil, \forall m,n\in \mathbf{N}$，則我們稱此 $k(m,n)$ 是**完美的**。

應用

回到一開始的吸螞蟻問題，我們所求的就是螞蟻一定會碰到裝置的最小數量與其配置，那如果把螞蟻改成人的話，即人一定會碰到的最少點數與位置，那就有很多用處了。例如， 在街道中將這些點放置監視器，一定存在某台監視器能拍攝到此人的去向，或許能 應用於追 蹤的相關問題，而且此時放置的監視器是最少的。 又例如，在佔地廣大的樂園裡，將這些點放置最少的地圖或服務人員，此時不斷向前移 動的遊客必能遇到這些服務設施。 本研究要找的是最經濟的方式來設置紅點，而非最有效的方式。諸如：監視器 配置、地圖路標的設置、網路節點的選擇、賣場服務人員的站點、遊樂場代幣機的設置、垃圾桶的安 置、便利商店的開設、圍捕生物的策略等，提供了最經濟的一種策略。

第四組

報告結束