2019年台灣國際科展得獎作品

第6組
411231119呂偉政
411231122張晏慈
411231243翁敬祐
411231146林毅丞
411231147王晨曦

目錄

一等獎

連續函數與多倍角公式推廣研究

• 研究動機

基於單純的好奇心，怎樣的函□□f會有如此的性質呢？

閱讀 A.F. Beardon 所著之 Algebra and Geometry

其中Chebyshev Polynomial可被以下式子定義：$T_m(\cos(\theta))=\cos(m\theta)$。

例如：

$2\cos^2(\theta)-1=\cos(2\theta)$，因此，$T_2(x)=2x^2-1$。

$4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)=\cos(3\theta)$，因此，$T_3(x)=4x^3-3x$，以此類推。

對cos而言，對於所有的$m\in\mathbb{N}$，均存在$T_m(x)\in\mathbb{C}[x]$使得$T_m(\cos(\theta))=\cos(m\theta)$。

研究目的

原本：找尋連 續函數 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$滿足對於所□□$m\in\mathbb{N}$，均存在

$$P_m^f(x)\in\mathbb{C}[x]\text{使得}P_m^f(f(x))=f(mx)$$

但對於對於任意的x，由於我們只關□□mx的函數值

將目標改為連續函□□ $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$

最後將研究結果推廣□□ $f:(0,\infty)\to\mathbb{C}$及任意□□P-多倍角函數

二等獎
圓周上跳躍回歸問題之研究

二等獎　圓周上跳躍回歸問題之研究

● 研究動機

第 27 屆環球城市數學競賽試題中，有一個關於圓周上跳躍問題:「12 隻蚱蜢處於圓周上 的不同點，牠們將圓周分割成 12 段弧，每步每隻蚱蜢同時沿順時針方向跳到以牠為端點的弧 之中點，得到新的 12 段弧，繼續這樣的跳步，則是否能在 12 步後至少有一隻蚱蜢回到初始點？」我們對這樣的回歸性質感到好奇，便展開一連串的研究。

• 研究目的

(一)圓周上相異n 個點變換成與下一點所成弧之中點，求某點回歸的最小變換數。

(二)圓周上相異n 個點變換成與下一點所成弧之中點，求某點回歸的所有可能變換數。

二等獎　圓周上跳躍回歸問題之研究

• 研究目的

(三)圓周上相異n 個點變換成與下一點所成弧之 p q: 處，求某點回歸的最小變換數。

(四)圓周上相異n 個點變換成與下一點所成弧之 p q: 處，求某點回歸的所有可能變換數。

(五)圓周上相異n 個點在特殊初始位置座標之回歸性質研究。

三等獎
費馬多邊形數定理之延伸探討

三等獎 費馬多邊形數定理之延伸探討

● 研究動機

陶哲軒教你聰明解數學中看到了四平方和定理，這定理 勾起了我莫大的好奇心，於是我便想要證明此定理，無奈卻是徒勞無功。
但隨後我發現 這麼美麗的定理居然不過是費馬多邊形數定理的一個特例罷了，看完了費馬多邊形數定 理後，我又對於數學之美有了更深一層的認識，也決心要持續將費馬多邊形數定理繼續 推廣下去

三等獎 費馬多邊形數定理之延伸探討

● 研究目的

本研究主要研究的核心問題為：針對給定的二次式$f(n)=an^2+bn+c$，定義一數列$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle a_{-1}=0, a_n=an^2+bn+c, \forall n\geq 0\rangle$，研究是否存在一正整數$\gamma$，使得對於任意非負整數$x$，$x$皆可表示成數列$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$\gamma$項之和，以及正整數$\gamma$與二次式$an^2+bn+c$兩者間的關係。

● 研究目的

(一) 明確定義所研究之問題、建構出一套理論，並論證出一些可供應用的數學定理。

(二) 藉由所求得定理，分別建構對於任意給定二次式$an\ 2 + bn + c$，尋求其對應的正整 數γ之上界、下界的模型。

(三) 藉由優化研究目的(二)中的模型，使得所求得的上下界差距降低，最後用夾擠求得 正整數γ的值。

三等獎
格子直線數與歐拉函數之探討

● 研究動機

本研究在探討過原點且通過特定格子區域中格子點的直線數，利用縱向或橫向方式來計算。不論哪一種方式皆從正方形區域探討，得到其格子直線數與歐拉函數有關，特別是在橫向方式中增加上高斯符號與高斯符號協助計算，得到正方形、長方形、三角形及圓形區域的直線數及其上下界，及探討上下界的特定區域。此外，將原點移動到任意點，探討過任意點且通過特定格子區域中格子點的直線數，得到一些有趣的性質。

● 研究動機

接下來，從正方形區域推廣至高維度的超立方體區域中的直線數，並推導出三個歐拉函數的推廣式，其中一種是約當囿互質函數，使用這些函數不僅能簡化計算，更能拓寬歐拉函數的視野。另外二種皆是利用幾何結構推導出來，其中一種是用第二類史特林數來表示。最後我們使用此歐拉函數的推廣三式推導出高維度的超立方體、超長方體、單體(即高維度中廣義三角形區域)及角錐柱中的格子直線數及其上下界，特別是利用横向方式獲得公式的更為精簡。

三等獎 格子直線數與歐拉函數之探討

● 研究目的

一、探討正方形區域中某些格子點對應歐拉函數的關係，以及導 出其格子直線數及其上下界，並且探討上下界的特定區域。同時探討將原點移動到任意點的直線數論證其性質。

二、探討任意三角形區域、長方形及圓形區域中的格子直線數及 其上下界，以及探討上下界的特定區域。

三等獎 格子直線數與歐拉函數之探討

• 研究目的

三、探討超立方體區域中某些格子點對應歐拉函數的推廣三式，且推導出超 立方體區域中的格子直線數及其上下界，以及探討上下界的特定區域。

四、探討超長方體區域中的格子直線數及其上下界，並探討上下界的特定區域。

五、探討高維度單體及角錐柱中的格子直線數及其上下界，並探討上下界的特 定區域。

四等獎
狡兔八窟

四等獎　狡兔八窟

● 研究動機

在「森棚教官的數學題」的專欄上看到下面這個有趣的問題：兔子甲藏在正立方體的八個頂點之一。每一次，獵人選擇一些頂點，並同 時對這些頂點開槍。如果這些頂點中有兔子，獵人就獵到兔子了。否則兔子在 獵人下一輪開槍之前可以移動到相鄰的頂點，也可以選擇停在原地不動。獵人 在開槍之前不知道兔子在那裡，也不知道兔子有沒有移動。如果獵人每次選的 頂點數要一樣多。請問要「保證」可以獵到兔子甲，每一次最少要同時對幾個頂點開槍？至少要開幾次槍？

● 研究目的

將題目一般化，探討兔子藏在各類圖形時，「保證」能射中兔子所需要的最小射擊點數、所需開槍次數，並提出相應的可行射擊策略。

三等獎

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}=\frac{2\sqrt{3}\pi+18}{27}$ 與其相關的無窮級數

● 研究動機

班上討論園遊會攤位時，同學們設計了一個博奕遊戲，流程如下：

1. 玩家隨意指定一個正整數 n。
2. 莊家拿出大小相同的 n 顆白球與 n 顆黑球，並將之放入一足夠大的箱子內。(假設每一顆 白球與黑球被取出的機率皆相等)
3. 玩家從箱子內一次取出 n 顆球，若 n 顆球均為白球則可得 n 元的獎金。

三等獎 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}=\frac{2\sqrt{3}\pi+18}{27}$ 與其相關的無窮級數

● 研究動機

自然而然的，大家想要知道這個遊戲的實際效益，我想到了從期望值的定義出發。注意到若以實際情況來看，正整數 n 的大小跟範圍應加以考慮與限制，但我感興趣的是 n 可為任意大的情況，此時的期望值計算為 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}=\frac{2\sqrt{3}\pi+18}{27}$ 個較難處理的無窮級數，引起了我的研究動機，希望能透過一些數學概念與方法嘗試解決。

● 研究目的

一、嘗試延伸原問題。

二、利用數學方法解決原問題並試著探討一系列相關的無窮級數。

三、將研究結果推廣並試著找出相關應用。

● 研究過程

先利用Ratio Test來驗證原問題之收斂性。

引理 1.1

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}$ 收斂

(2) 對所有的 $x\in\mathbb{R}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^x}{C_n^{2n}}$ 收斂

證明. 利用附錄一中的**性質** 1.2 (比值審斂法)，驗證極限值小於 1 即可：

(1) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{C_{n+1}^{2n+2}}\times\frac{C_n^{2n}}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^3}{(2n+2)(2n+1)(n)}\cdot\frac{(n+1)}{n}\right|=\frac{1}{4}<1$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^x}{C_{n+1}^{2n+2}}\times\frac{C_n^{2n}}{n^x}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^3}{(2n+2)(2n+1)(n)}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^x\right|=\frac{1}{4}<1,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

● 研究過程

再利用Gamma Function和Beta Function化簡可得

引理 1.2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{C_n^{2n}}=\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left(t-t^2\right)^n\right)dt$$

- # 研究過程

已知將無窮級數和轉換成積分式的方法後，故可求

定理 1.1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}=\frac{2\sqrt{3}\pi+18}{27}$$

● 研究過程

討論當分子之多項式次方提高後，是否還能沿用以Gamma Function和Beta Function的形式，將問題轉換成積分處理。

定理 1.2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{C_n^{2n}}=\frac{10\sqrt{3}\pi+108}{81}$$

三等獎 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}=\frac{2\sqrt{3}\pi+18}{27}$ 與其相關的無窮級數

● 研究過程

雖能求出上一步結果，但過程太過複雜，故先尋找快速求得方法。

→討論收斂性(By ratio test)

引理 2.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{C_n^{2n}}$ 的收斂區間為 $(-4,4)$.

● 研究過程

發現f(x)滿足:

引理 **2.2** $f(x)$ 滿足

$$\begin{cases} f'(x)-\dfrac{(x+2)}{x(4-x)}f(x)=\dfrac{1}{4-x}, & x\in(-4,4)\setminus\{0\} \\ f(0)=0 \end{cases}$$

● 研究過程

透過一階微分方程解求出:

定理 2.1

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{(4-x)^3}}\left(\sqrt{x(4-x)}+4\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right),\quad x\in(-4,4)$$

● 研究過程

分別代入:

推論 2.1

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{C_n^{2n}}=\frac{9+2\sqrt{3}\pi}{27}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{C_n^{2n}}=\frac{2+\pi}{2}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{C_n^{2n}}=\frac{9+4\sqrt{3}\pi}{3}$

● 研究過程

又可得其餘非整數之推論:

推論 2.2

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{C_n^{2n}}=\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(1+\frac{\pi}{3}\right)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n}{C_n^{2n}}=\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(1+\frac{5}{3}\pi\right)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^n}{C_n^{2n}}=\left(\frac{3\sqrt{2}-4}{2}\right)\left(\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}\right)$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^n}{C_n^{2n}}=\left(\frac{3\sqrt{2}+4}{2}\right)\left(\sqrt{2}+\frac{3\pi}{2}\right)$

● 研究成果

回到原問題，此遊戲的期望值(當n趨近於無窮)約為1.06973，而根據實際面之n(當n等於10)，期望值約為1.06971。

因此作者若此遊戲向客人收取2元會是不錯的選擇。

此外，此類型之級數也能設計更多不同的博奕遊戲。

感謝各位聆聽～