數學思維與解題
第8組

第56屆數學組科展作品

第56屆數學組
科展作品

國小組-第一名
數字迷宮-雙對角線數字和最大值之研究

國中組-第一名
正 n 邊形上等弧交點所圍圖形之探討

高中組-第一名
多方塊的塗色問題

國小組-第二名
螞蟻回家-等角環形最短路徑之探討

國中組-第二名
驚嘆尤拉線群遇到60°與120°

高中組-第二名
層層疊疊-雙心多邊形面積的一個有趣性質

國小組-第二名

螞蟻回家-等角環形最短路徑之探討

研究動機：

有一次我看到螞蟻在吃我的蛋糕，我一面趕螞蟻，一面想螞蟻是走什麼路線回巢穴，它有方向感嗎？它有距離感嗎？老師告訴我們類似的問題，也曾出現在某一次國中的資優班入 學考，該題如下： 螞蟻沿著方格棋盤移動，第1次，走1格後，左轉或右轉90°；第2次，走2格後，左轉或右轉90°； 第3次，走3格後，左轉或右轉90°。每次轉90°，走的格數每次遞增1，走到第n次後，螞蟻就可以與第一次方向呈垂直(90°)的方向，回到原點。求n的最小值。1後來我們發現「打開魔數箱」這本書中也提到這個題目，雖然書中也畫出了依此規則走出的圖形，卻沒有詳細說出作者如何找出路徑。我們覺得這個問題蠻有趣的，決定深入探討不同的「轉彎角度」和「立體路徑」會產生怎樣不同的結果，於是，螞蟻回家就成了我們今年科展探討的題目。 在研究的過程中，我們利用課堂上學到的座標概念、求和公式(梯形公式)幫助我們研究， 並以正多面體幫助我們定義3維座標的軸線，與3D最短路徑的方向，來找出螞蟻回家的最短路徑。

研究目的：

一、找出螞蟻每次轉90°，回到原點的最短路徑

二、找出螞蟻每次轉120°，回到原點的最短路徑

三、找出螞蟻每次轉60°，回到原點的最短路徑

四、找出螞蟻回原點的等角3D最短路徑

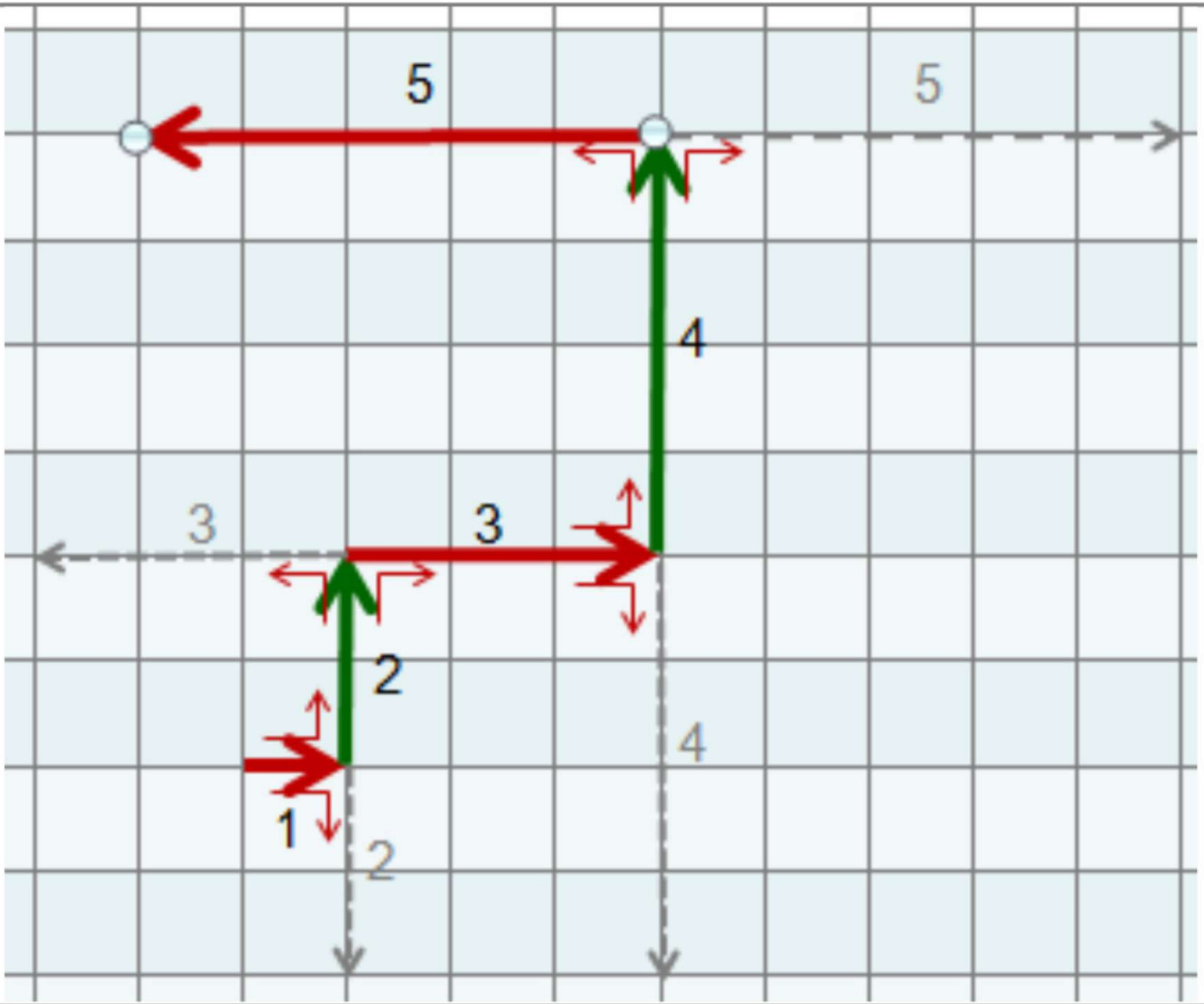


圖 1：遊戲說明

國中組-第一名

正 n 邊形上等弧交點所圍圖形之探討

研究動機：

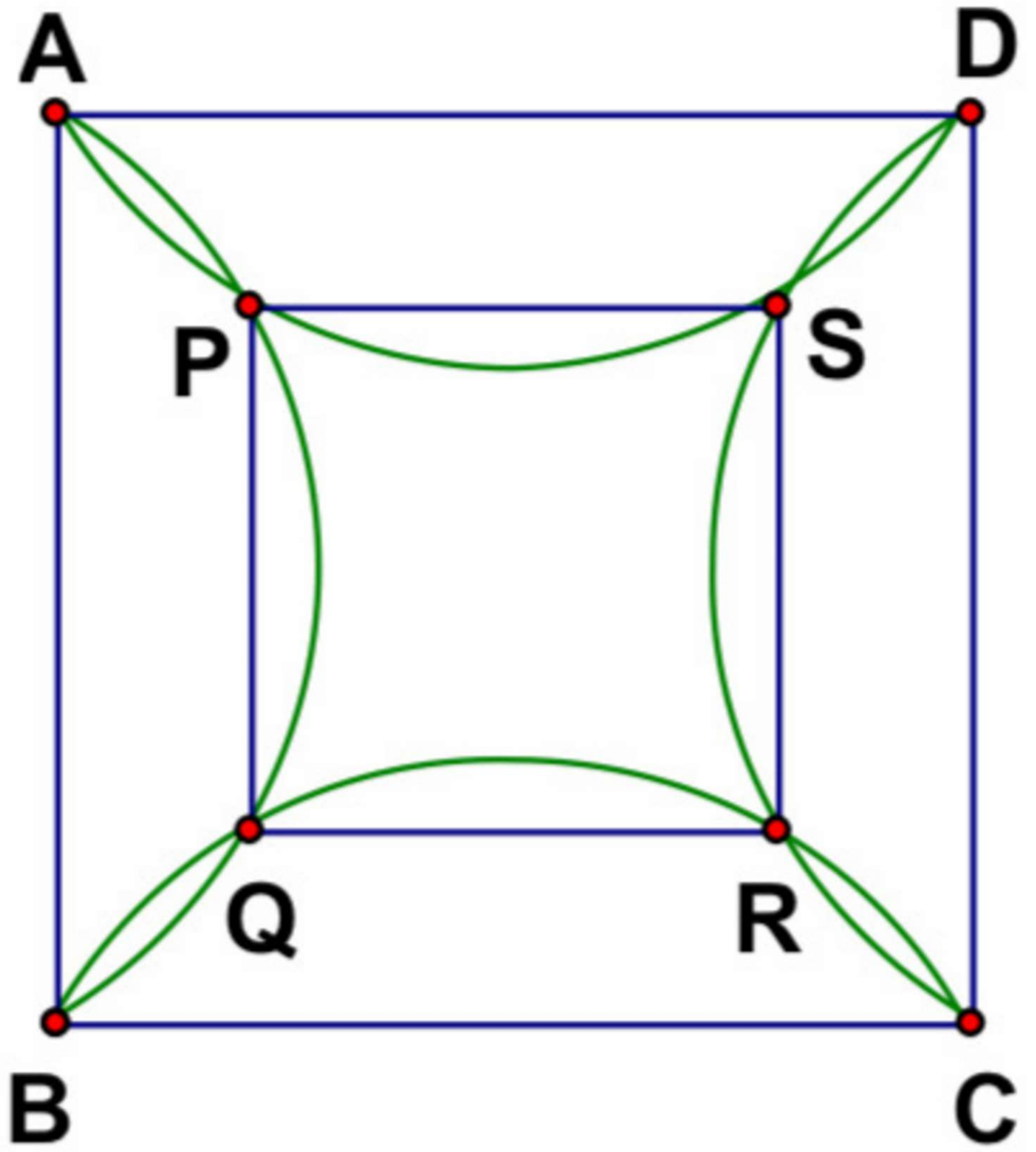
我在高雄市103學年度國中數學競賽的試題中看到這個題目：「有一個邊長為2的正方形ABCD，在其4個邊分別有4個大小相同的圓弧，且這4個圓弧交出4個點P、Q、R、S，請問正方形PQRS的面積為多少？」我好奇的是，雖然題目直接說PQRS會是個正方形，但要如何確定PQRS是正方形？又要如何求得其面積呢？於是我開始進行本次的研究。

研究問題：

A D P Q R S B C 從原來的題目設計來說，在正方形ABCD各邊作大小相同的四個圓弧，所產生的4個交點可以形成一個新的正方形，且其面積似乎與原正方形有一定的比例關係，那麼如果將正方形改變成為正三角形、正五邊形、...、正n邊形，是否依然會有類似於正方形的結果？另外，如果圓弧的度數不是120，結果是否又會不同，於是我提出以下的研究問題：

(一) 若原始圖形為正n邊形，在各邊作相同大小的n個圓弧，此時圓弧的限制條件為何，才能讓圓弧間產生交點？而所產生的n個交點所形成的新圖形與原圖形的相對位置為何？

(二) 若原始圖形為正n邊形，在各邊作相同大小的n個圓弧，所產生的n個交點所形成的新圖形為何？新圖形面積與原圖形面積的比例為何？


A
D
P
S
Q
R
B
C

國中組-第二名

驚嘆尤拉線群遇到60°與120°

研究動機：

在數學家的故事一書中，談到　的尤拉線，非常有趣，設想一個　有一條尤拉線，如果這個　被分割成多個小　，這些小　也各自有尤拉線，試問這些小　的尤拉線會共點嗎? 事實上，在三邊長沒有特定關係的一般　中，任取的切割點P所形成的三個　的各自尤拉線都不易共點，如圖。要如何切割　方可使那些尤拉線共點?又這共點的點都出現在何處？

研究目的：

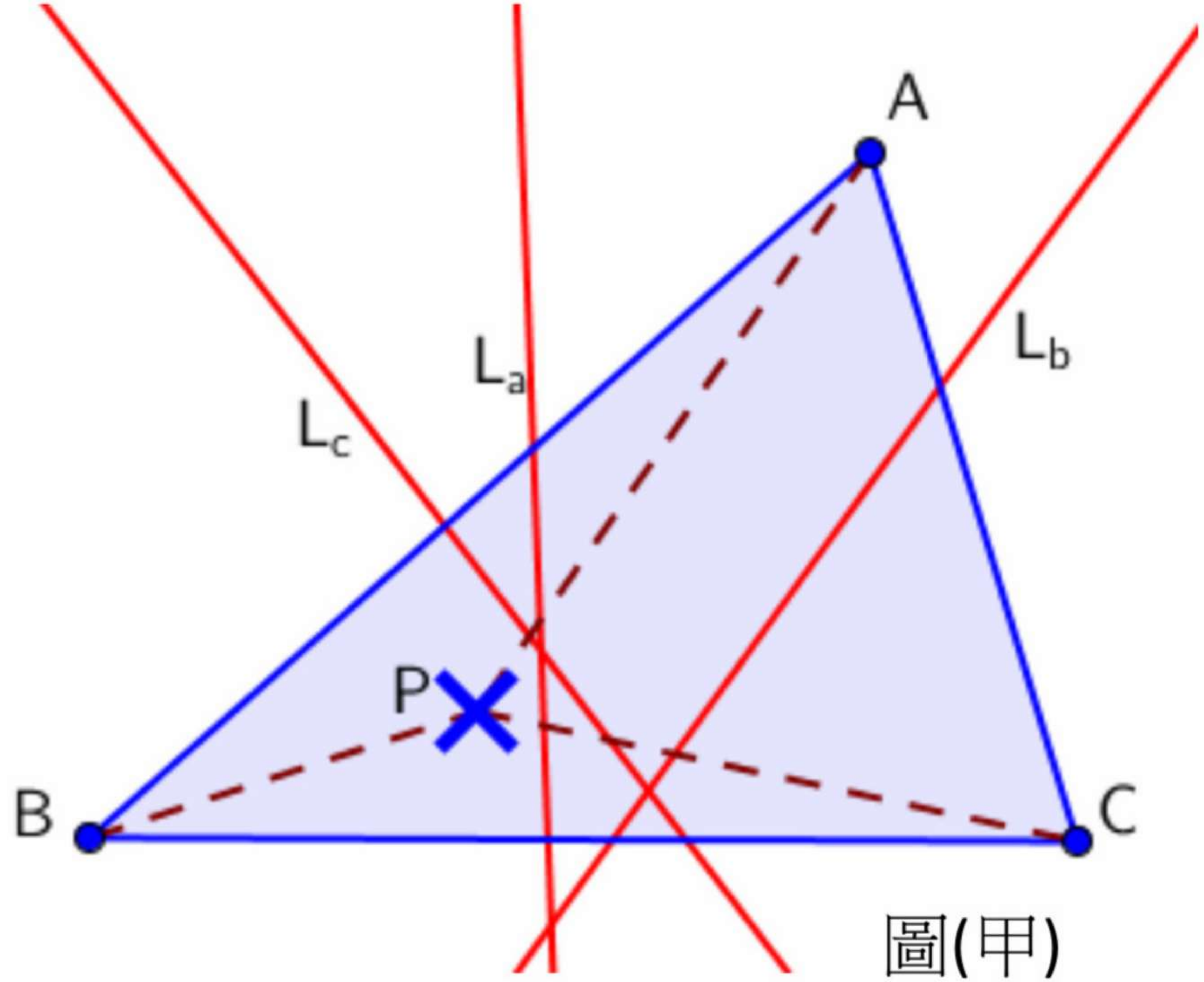
一、探討一般　中有哪些特殊切割點，可使三個小　的尤拉線共點。又這共點的點所出現的位置，有何特殊性

二、探討各類　中，三尤拉線可共點的切割點P的軌跡及其共點Q的軌跡

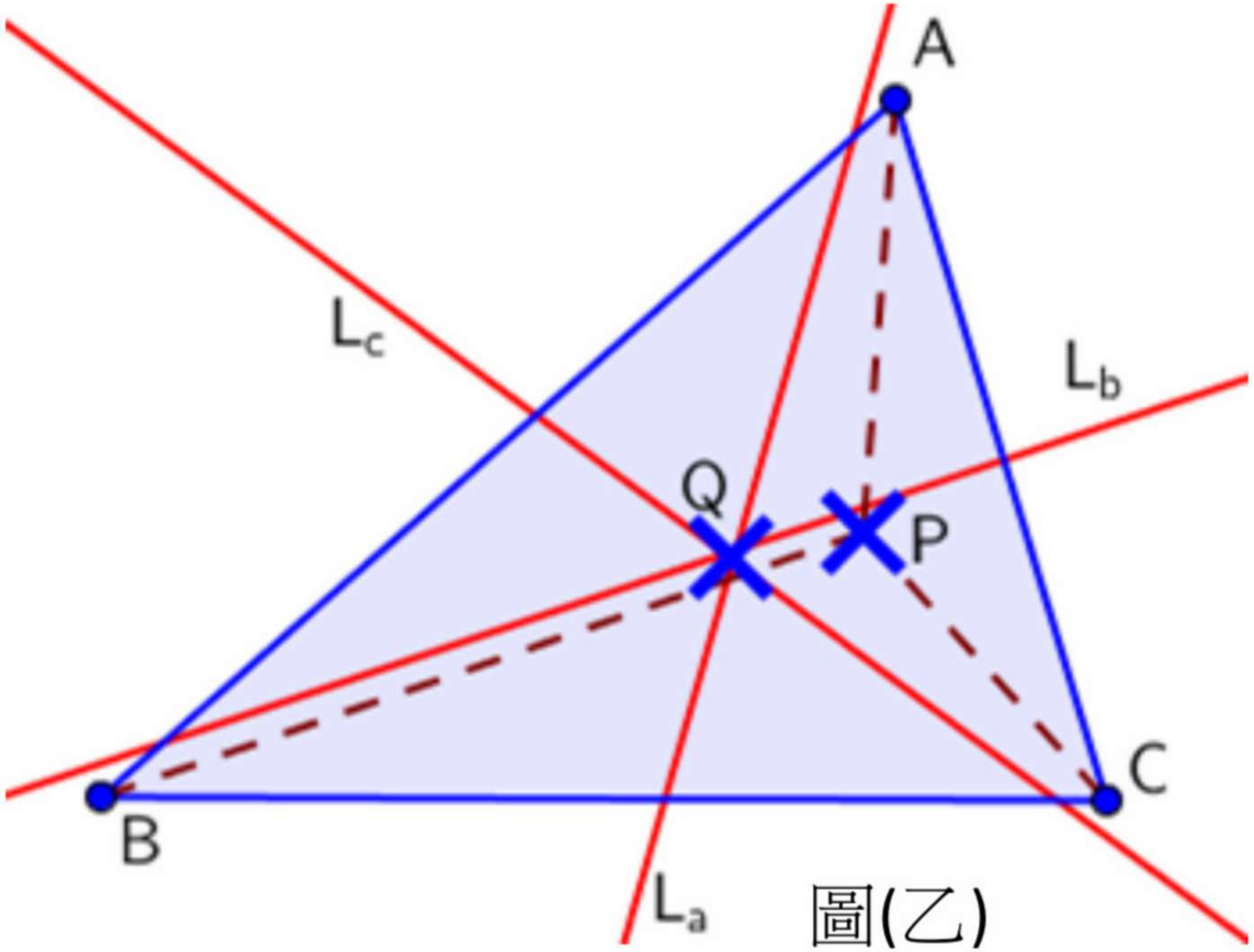
三、探討等腰　平面上的切割點P、共點Q的競逐關係

四、探討各類　中，可使三尤拉線互相平行的切割點及其尺規作圖法

五、針對有一內角為60°或120°的　，利用尺規作圖完全畫出共點P的軌跡



圖(甲)



圖(乙)

高中組-第一名

多方塊的塗色問題

研究動機：

有一天，在書上看到了這個題目： 在無限大的棋盤上，塗上n種顏色使得V形三方塊沿格線無論如何放置在 棋盤上，都不會蓋到重複之顏色，問n的最小值為何？ $n = 4$是滿足條件的，其構造法如圖 ，接著要證明$n = 3$無法滿足條件。如果$n = 3$時，那麼下表格中的x便無 法塗上三種顏色中的其中一種，否則會蓋到重複之顏色，故$n > 3$，又前面給出$n = 4$的上界，所以n的最小值為4。 1 x 2 3 不過看完上面的問題後，我便開始思考：如果不是V形三方塊，而是其它種三方塊，甚至是四方塊、五方塊，或者廣泛的k方塊，那麼n的最小值又是什麼呢？原本以為此類問題不難解決，一經深入探究，發現事實並非如此。有些情況雖然可以找到上界，但是要證明不能再少(即下界)則非常困難；有些情況連上界都非常難找到。 於是我便開始對這個題目進行研究。

研究目的：

一、對於單方塊到五方塊的種類進行分析
二、探討各種多方塊塗顏色之構造法並求出n的最小值
三、證明求出的n即為最小值
四、研究是否有方法對所有多方塊所需的顏色進行估計

1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4

高中組-第二名

層層疊疊-雙心多邊形面積的一個有趣性質

研究動機：

在奧林匹亞數學中的幾何問題一書的第一篇第十五章性質9提到「三角形的面積是其旁心三角形面積與內切圓切點三角形面積的等比中項」。這讓我們想到此定理是否可以推廣到其它邊數的雙心多邊形，因此決定以此當作研究題材。

研究目的：

本研究的目的在討論並尋找其它雙心n邊形，使其符合上述性質：雙心n邊形的面積是其旁心n邊形面積與內切圓切點n邊形面積的等比中項。並試著利用雙心n邊形的性質，證明此結果為真。

國小組-第一名

數字迷宮-雙對角線數字和最大值之研究

研究動機：

數字迷宮這個遊戲是老師在課堂上介紹的遊戲，老師要我們把數字依序填入方格中，並找出哪一種填法的對角線和為最大值。 但是我們不管怎樣試，總是無法找出對角線的最大值，大家十分的懊惱，因此我們決定把這個遊戲當作研究的主題，繼續找出該如何填數字，才能使對角線的和為最大值，並求出最大值的公式。

研究目的：

一、找出一條對角線最大值的填法

二、找出兩條對角線最大值的填法

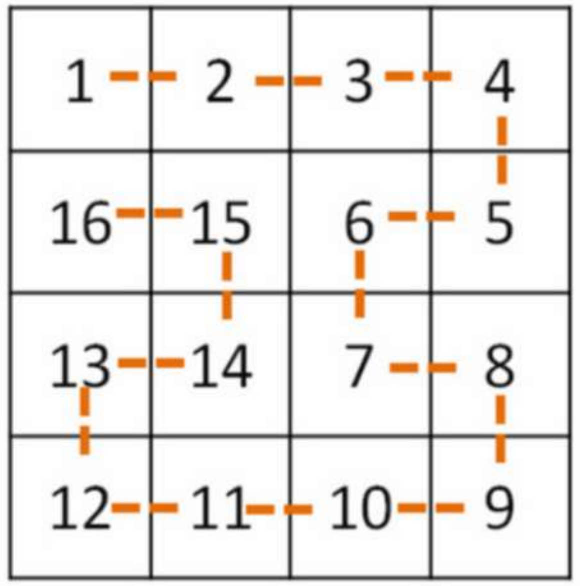
三、找出最大值的對角線與邊長的關係

研究方法

在 n×n 的正方形方格中，任選一個方格由 1 或最大數 n 2開始，依序填完所有的格子。
填寫的規則如下：
(一)每次只能將下一個數字填寫在前一個數字的相鄰位置（上、下、左、右），不可以填在對角的位置

(二)由 1 或 n 2開始，依序填寫，一直到把最後一個數字填入最後一個方格為止。

(三)最後要比賽誰可以讓正方形其中一條對角線上的 n 個數字總和為最大。

遊戲說明	填寫結果
	兩條對角線的和分別為 1＋15＋7＋9＝32（左上→右下） 4＋6＋14＋12＝36（右上→左下） 以左圖的填法，單對角線的最大值為 36； 雙對角線的和為 36+32=68

研究方法

研究 1：單一對角線最大值

(一)當 n=偶數時，單一對角線數字總和為最大值的填法與數字和。

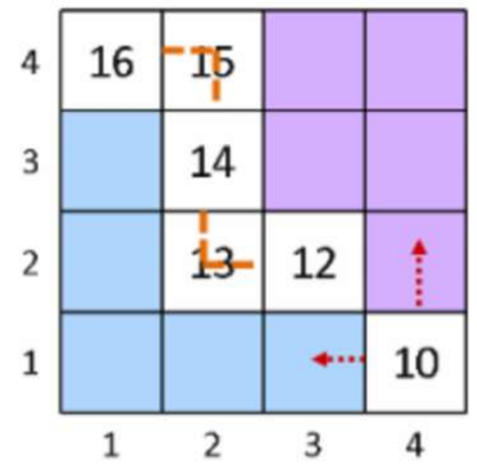
1、遊戲規定每次只能填鄰格，且需依序填完整個方格，故我們可將填格所連成的路徑為 一「漢米爾頓路徑」。

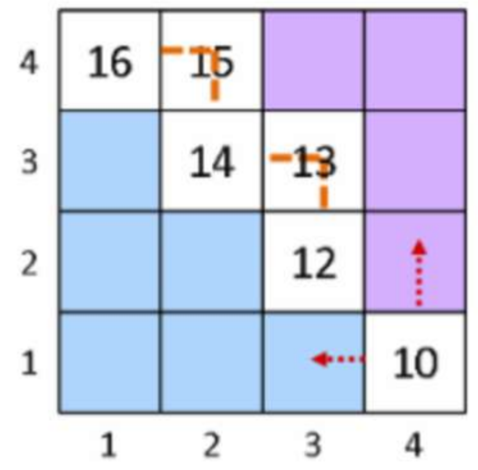
2、解決 n×n 對角線數字總和為最大值的問題需思考兩個問題：

(1) 盡量讓對角線數填入最大值　(2) 必須隨時讓餘格保持為「漢米爾頓路徑」。

3、因為遊戲規定每一個數字只能填入下一個數字的相鄰位置，若最大數 n 2為偶數，填入 第一個對角線格，則所有對角線數都為偶數。

4、n＝為偶數時，將最大的 n 個偶數都填在對角線上是否可行？





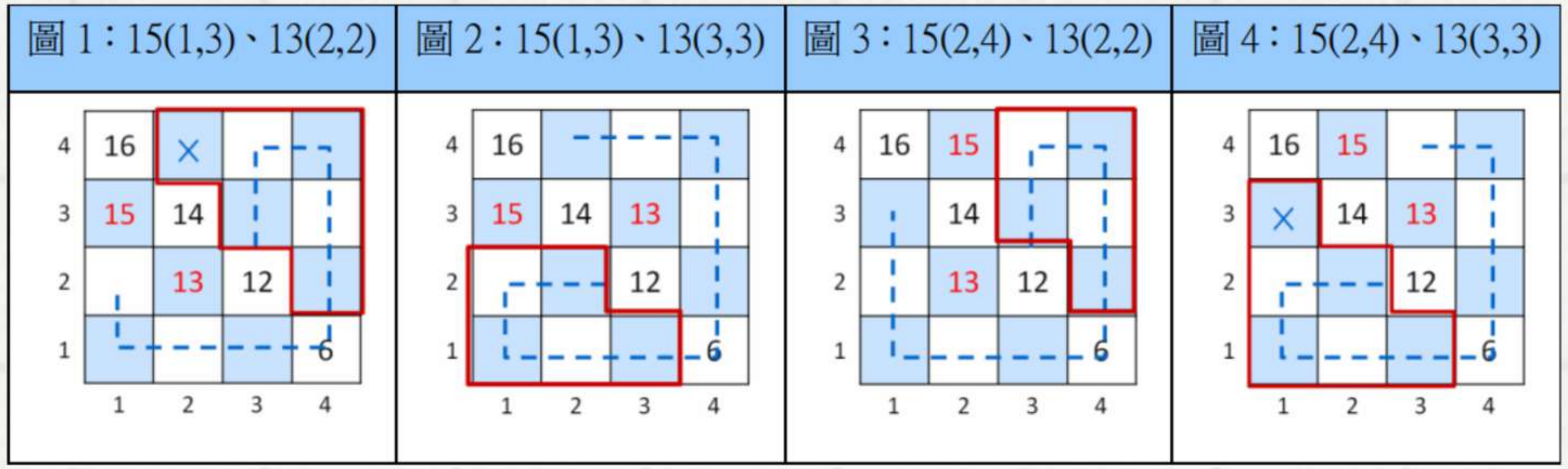
以 n＝4 為例，

若將 4 個最大的偶數 16、14、12、10 填在對角線，則會將整個圖形區隔成右上和左下兩區塊，而無法以「漢米爾頓路徑」填完整個格子。

研究方法

5、若將 3 個最大偶數填在對角線，然後先走完右上或左下區塊，是否可行？

(1) 填完 16、14、12，尚缺兩個連接的「轉角數」15 與 13 未填，連接 16 與 14 的「15」的位置有兩個可能(1,3)與(2,4)；連接 14 與 12 的「13」的位置有兩個可能(2,2)與(3,3)。



(2) 檢視上圖 1 與圖 4，發現圖 1 的右上區域及圖 4 的左下區域都出現「3 階階梯形」 的區域，3 層的階梯形區域的色格比白格多 2，因為「漢米爾頓路徑」必須白格與 色格相間，白格與色格的差最多只能 1。

若「白格＝色格」，則起點與終點分別為空白格與色格；

若「白格－色格＝1」，則起點與終點皆為白格；

若「色格－白格＝1」，則起點與終點皆為色格；

故上圖 1 與圖 4 的餘格皆無法以「漢米爾頓路徑」填完所有的數。

研究方法

(3) 而上圖 2 與上圖 3，都為色格比白格多 1 的狀況，且餘格起點 11 與終點 1 的位置 為色格，故能以漢米爾頓路徑順利填完剩下的餘格。

圖 2

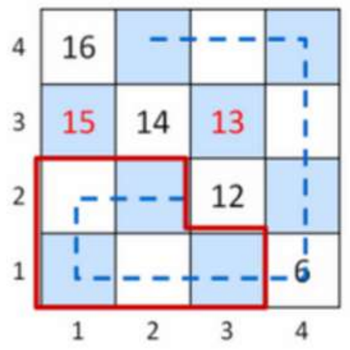
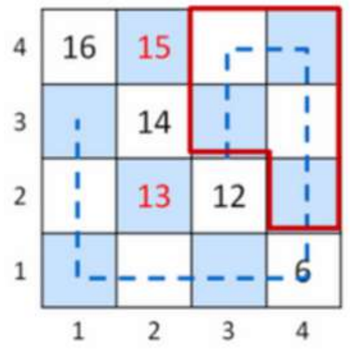


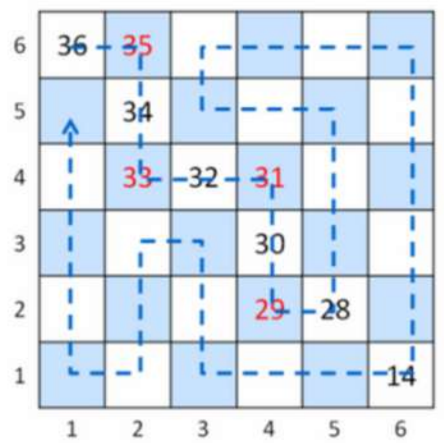
圖 3

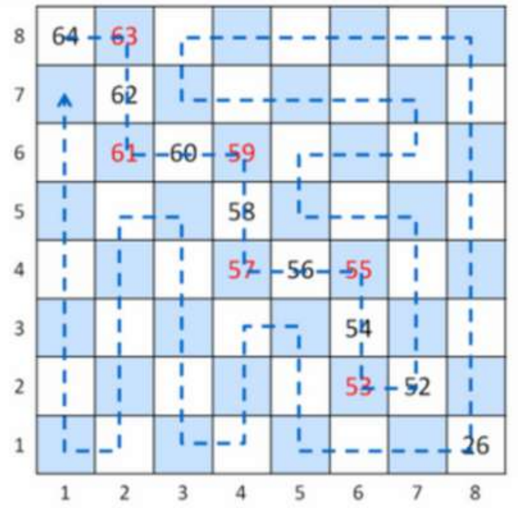


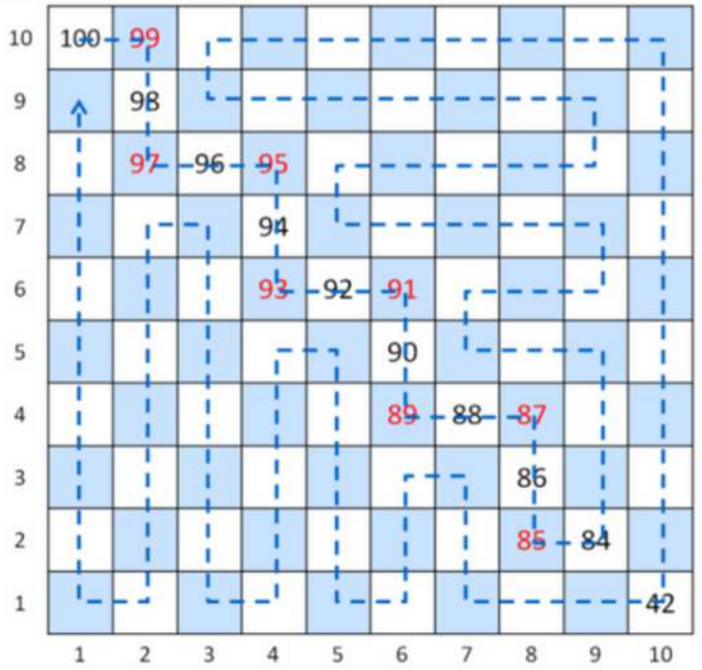
檢視圖 2 與圖 3 兩者路徑相似：

- 轉角數「15」和「13」分別填在對角線的左、右兩側。
- 先填 3 個對角線數⇨填完其中一個區塊⇨第 4 個對角線數⇨填完所有格子。
- 最大對角線數字和的為 16＋14＋12＋6＝48。

6、以 n＝4 的填數模式，填 n＝6、8、10 皆能順利填完所有格子，且對角線數字和為最大值







n＝6，最大對角線的數字和為

36+34+32+30+28+14＝174

n＝8，最大對角線的數字和為

64+62+60+58+56+54+52+26＝432

n＝10，最大對角線的數字和為

100+98+96+94+92+90+88+86+84+42

＝870

研究方法

7、偶數對角線的數和的最大值

n	4	6	8	10	…	n
第 1 個數	16	36	64	100	…	n^2
第 n-1 個數	12	28	52	84	…	$n^2-2[(n-1)-1)]=n^2-2n+4$
第 n 個數	6	14	26	42	…	$[n^2-2(n-2)]\div2=\frac{n^2-2n+4}{2}$
對角線數字和	48	174	432	870	…	$\frac{2n^3-3n^2+4n}{2}$

8、單一對角線最大值

1~(n-1)個對角線數　　第 n 個對角線數

$$\boxed{[n^2+n^2-2n+4]\times(n-1)\div 2}+\frac{n^2-2n+4}{2}=\frac{2n^3-3n^2+4n}{2}$$

研究方法

(二) 當 n＝ 奇數時，單一對角線數字總和為最大值的填法與數字和。

1、n 為奇數，單一對角線最大值

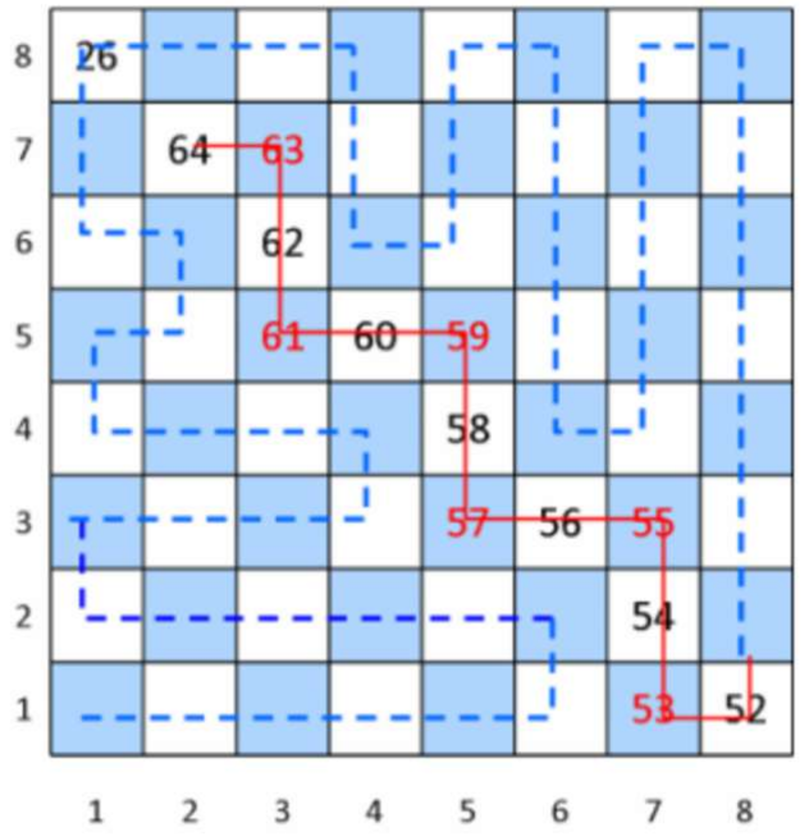
1~(n-1)個對角線數　　　　第 n 個對角線數

$$\boxed{[n^2+n^2-2n+4]\times(n-1)\div 2}+\frac{n^2-2n+3}{2}$$

$$=\frac{(2n^2-2n+4)\times(n-1)}{2}+\frac{n^2-2n+3}{2}$$

$$=\frac{2n^3-2n^2+4n-2n^2+2n-4}{2}+\frac{n^2-2n+3}{2}$$

$$=\frac{2n^3-3n^2+4n-1}{2}$$



2、將最大數 n^2 由左上第二格填起，也適用在邊長為偶數的情形。

研究方法

(三) 單對角線和最大值的最佳路徑需符合兩個原則

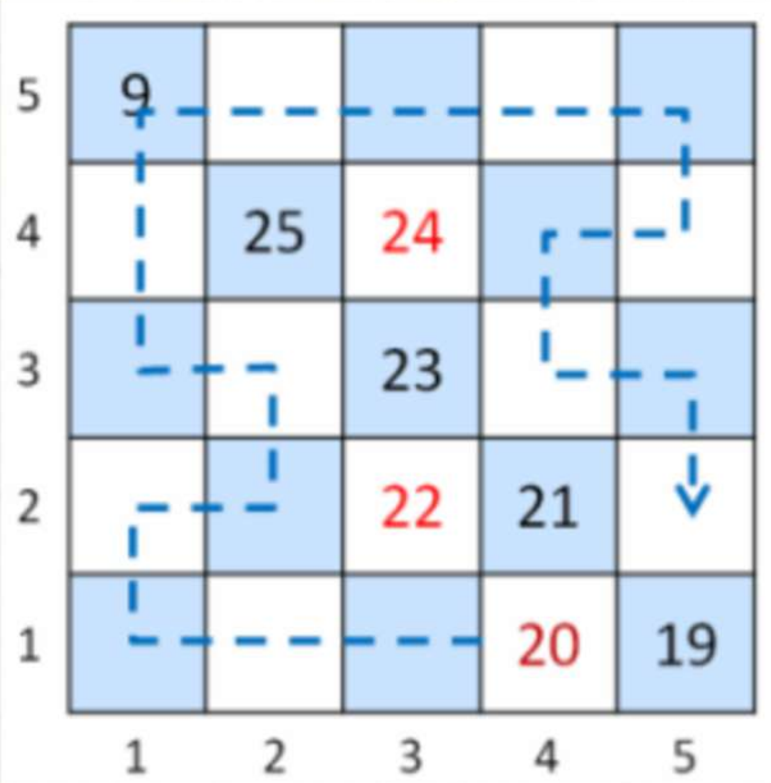
1、將最大數 n 2由左上第 2 格(2,n-1)格開始，依序遞減填完 (1) n-1 個對角線數 → (2)餘格的上半區塊(或左下區塊) →(3)第 n 個對角線數 →(4)餘格

2、連接對角線的轉角數，需依序平均分別填入右上、左下兩區才能使餘格保持為「漢米爾頓路徑」。

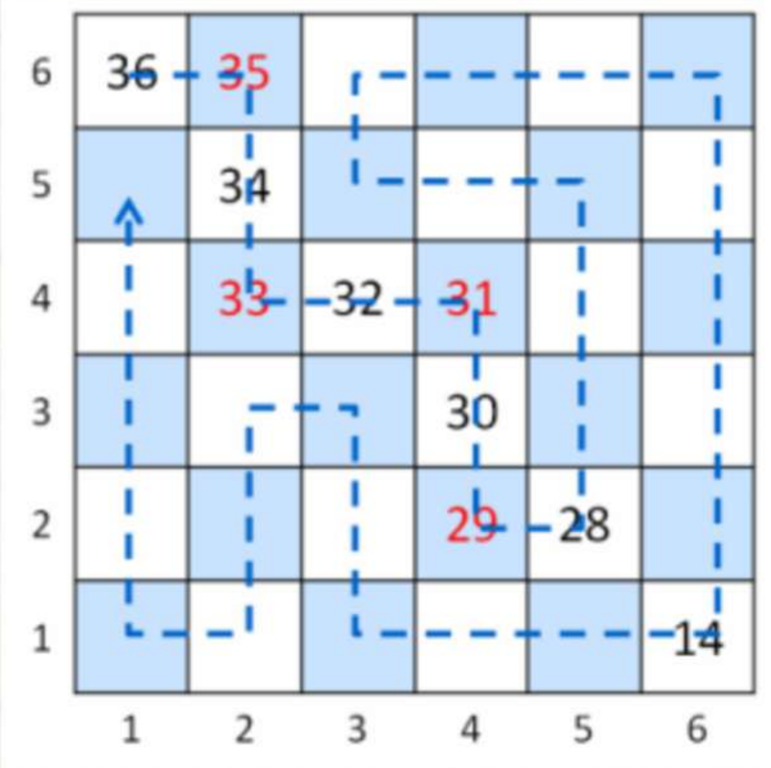
研究結果

一、單一對角線的填法

(一)將最大數 n 2由對角線格(2,n-1)位置沿對角線蛇形而下， 將轉角數依序平均分配在右上區與左下區，至(n,n)位址，再 完成左下區(或右上區)的餘格，至(1,n)格位置填完最後一個 對角線數後，再完成右上區餘格。



(二) 而偶數則多一種填法，最大差異在起始點，偶數的起始點除了(2,n-1)位置外，亦可 由或(1,n)的位置開始，依序完成 n-1 個角落數，接著完成右上區(或左下區)的餘格， 至(n,1)格位置填完最後一個對角線數後，再完成左下區 (或右上區)餘格。

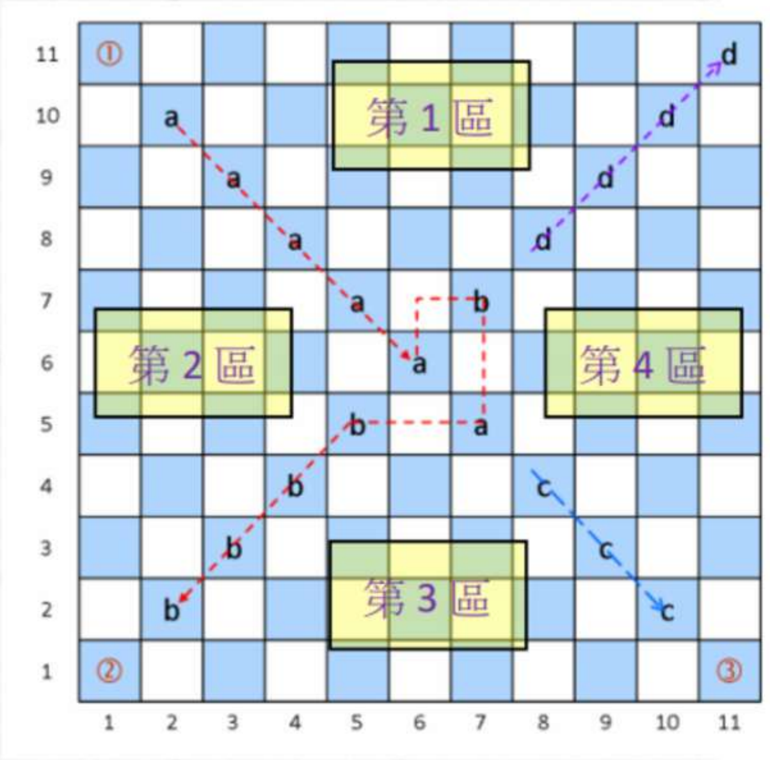


研究結果

二、單一對角線數字和的最大值

奇數＝$\frac{2n^3-3n^2+4n-1}{2}$ ；偶數＝$\frac{2n^3-3n^2+4n}{2}$

三、雙對角線的填法



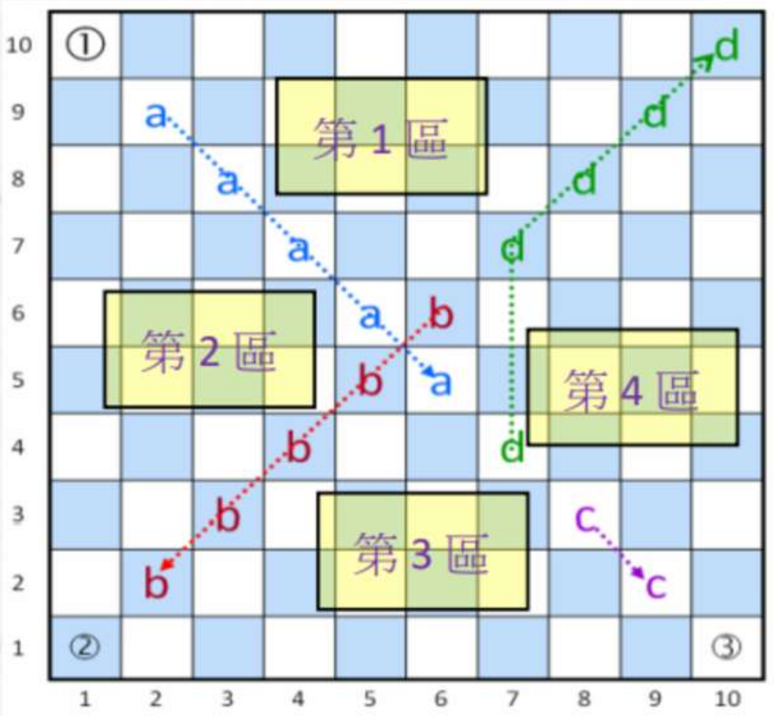
(一) 奇數

1、將最大數 n 2由(2，n-1)格開始，沿 a 軸往中間填。

2、到達中間繞小圈填完中間五格

3、再依序填完左下 b 軸、左下 c 軸和右上 d 軸。

4、最後再填第 4 區餘格→角落數③ → 第 3 區餘格→角落數② → 第 2 區餘格→角落數① → 第 1 區餘格。



(二) 偶數

1、將最大數 n 2由(2，n-1)格開始，沿 a 軸往中間走。

2、到達中間走完中間四格，再依序走完左下 b 軸、 右上 d 軸和右下 c 軸。

3、最後再填第 4 區餘格→角落數③ →第 3 區餘格→角落數② →第 2 區餘格→角落數 ① → 第 1 區餘格。

研究結果

四、雙對角線數字和的最大值

(一) 奇數＝2n 3－8n 2＋24n－29；

(二) 偶數＝2n 3－7n 2＋24n－26－4p；p＝ $\left\lfloor \dfrac{n-4}{2} \div 3 \right\rfloor$

結論

一、求單對角線或雙對角線最大值的填法，都能以（2, n-1）為起始格填入最大數，但需時時 注意餘格隨時維持為「漢米爾頓路徑」。

二、對角線和為最大值的填法就是先填完軸線上的「對角線數」，再處理位於對角線上的 「角落數」和各區的餘格。

三、連接對角線上的「轉角數」該填在軸線的哪個區格，是影響對角線數和能否為最大值的 關鍵。
(一) 轉角數的位置會影響各區的餘格是否為「漢米爾頓路徑」，會不會留下「缺格」。
(二) 轉角數的安排也會影響到最後的 3 個角落數，這現象我們在邊長為偶數的雙對角線看到明顯的例子。

四、求雙對角線數字和最大值的歷程雖然複雜，但最大值的公式卻簡潔有力
(一) 奇數＝2n 3－8n 2＋24n－29；
(二) 偶數＝2n 3－7n 2＋24n－26－4p；p＝$\left\lfloor \frac{n-4}{2} \div 3 \right\rfloor$

Thank you very much!