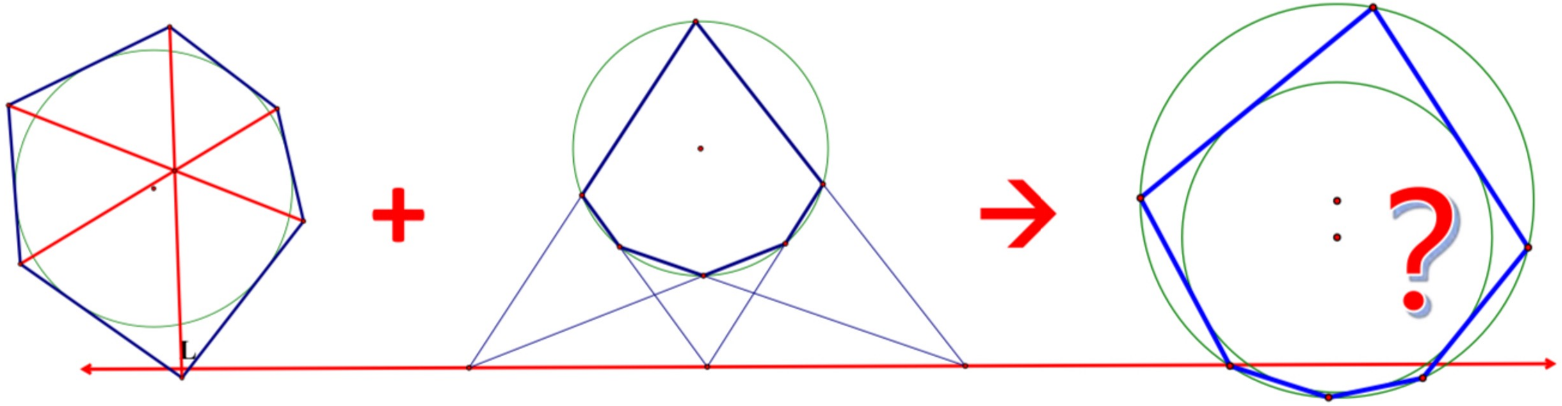
數學思維與解題

第九組
410931249劉育愷
410931231陳敬棋
411031211時瑋程
411031241吳宗燁
411131210羅紘萱

一等獎

層出不窮的彩蛋有「心」「跡」—圓內接與外切多邊形及其遞延圖形性質探討

關於Brianchon定理（布列安桑定理）和pascal定理（帕斯卡定理）的結合

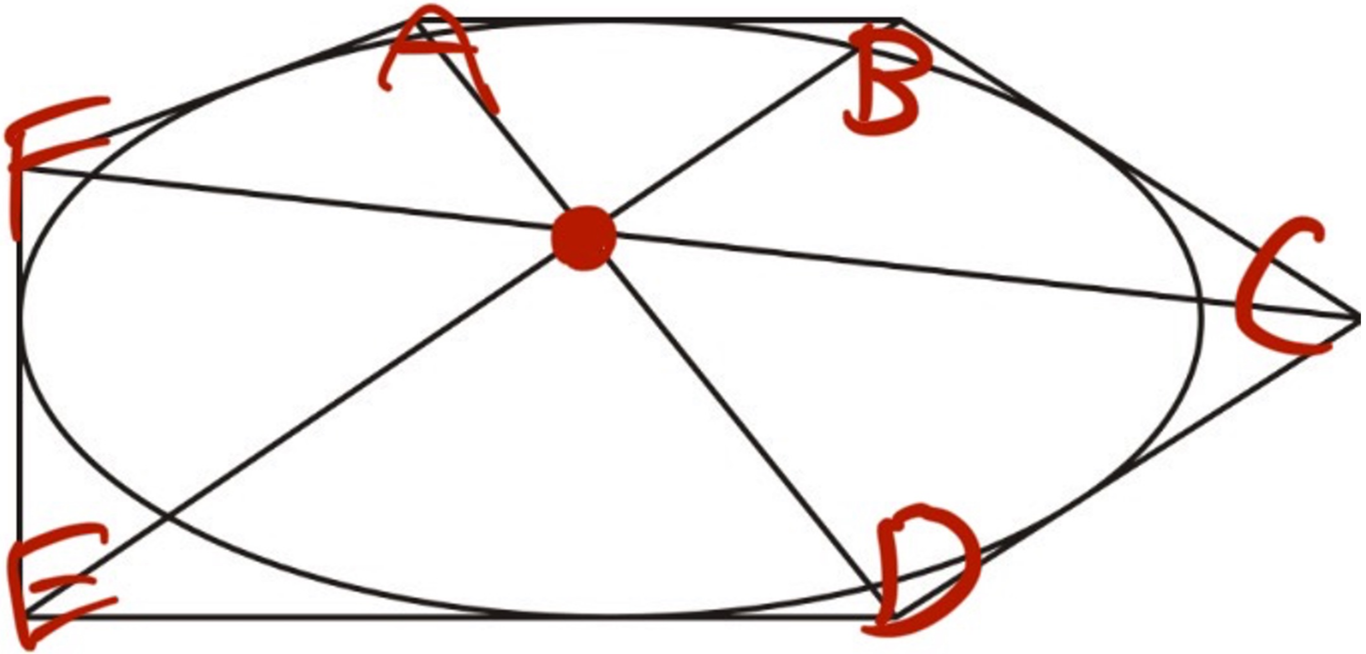


Brianchon定理

設ABCDEF為圓錐曲線的外切六邊形

則直線AD,BE和CF三線共點。

這個定理就叫做Brianchon定理。

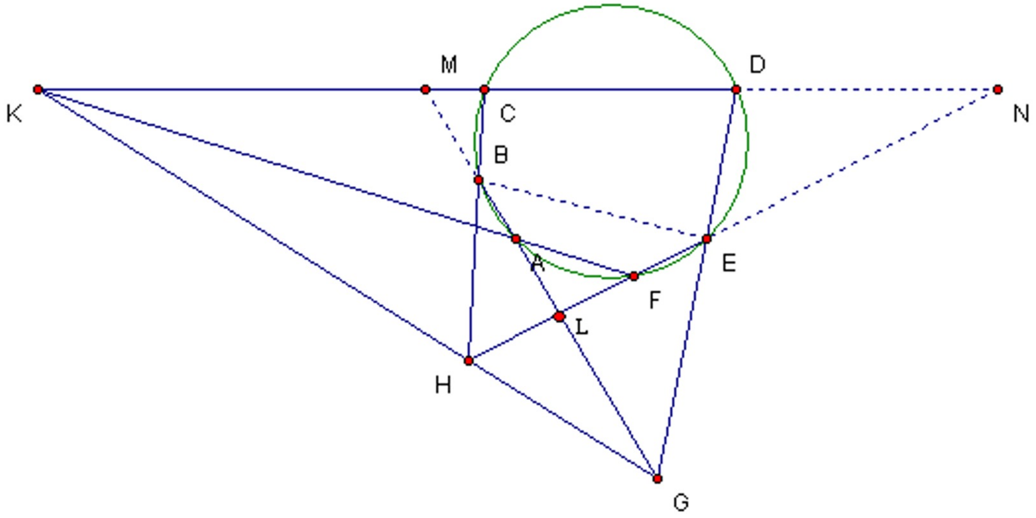


Pascal定理

圓錐曲線的內接六邊形其三條對邊的交點共線

這個定理由法國數學家布萊士·帕斯卡在16歲的時候提出但並未證明，是射影幾何中的一個重要定理

Biranchon定理與Pascal定理互為對偶



二等獎

作品名稱：命中「助」定 - 間接互助模型的探討

研究動機

在一次專題討論中，我們接觸到了一篇研究「互助賽局」的經濟學論文，對其結合人性所假設的社會模型條件與三種不同性格之人所占比例的演化過程之關聯產生興趣。我們開始思考這篇論文中對社會的假設是否真的接近社會現況，以及我們是否能建構出更加接近現實的模型，參考 Berger(2011)的模型設定並結合高一所學的「機 率」及「二項式定理」展開了研究，並試著用不同的觀點描繪出三種人的演化行為。

研究目的

探討 discriminator 的行為判斷準則對間接互助(利他)模型的影響，以及 cooperator、defector 及 discriminator 所占的比例在演化機制中扮演的角色。

研究方法

基礎假設：

1. 必定幫助他人的合作者 cooperator
2. 絕對不幫助他人的疏離者 defector
3. 依據對方過往名聲，決定是否給予幫助的鑑別者 discriminator

組成比例依序為$x,y,z(x+y+z=1)$

4.有心助人但力所未逮的機率為α；有心助人且成功的機率為$1-\alpha$

無心幫人卻幫人的機率為0

參考模型設定-Berger

假設：

(1) 當 discriminator 遇到需要幫助的人，會觀察這個人過去有機會助人時的行為，並從中隨機挑取兩次，只要其中至少有一次他幫助了別人，discriminator 就會視這個人為好人，並決定給予幫助。《判準 1》

(2) 當助人成功時，會帶給助人者自身利益減損 c 單位效用(utility)，而此時受到幫助的人其效用可提升 b 單位，並且 $b > c > 0$。

想像著隨著時間推進，$t = 0, 1, 2, \cdots$，機運會持續隨機地將社會成員與以配對，使其面臨是否幫助他人的情境。在離散時間 t 時，cooperator，defector 及 discriminator 成功助人的機率分別為 $\overline{\alpha} = 1 - \alpha$，0 及 p_t。由於 p_t 會隨時間更動，首先要考慮的問題便是隨著時間推進，p_t 是否會趨於穩定？(假設 $p_0 = p_1 = \dfrac{1}{2}$。)

定理 1 (Berger)： p_t **必定收斂至一不動點** p **(穩定態)，並且** p **滿足**

$$p = \overline{\alpha}\left[(1 - \alpha^2)x + p(2 - p)z\right] \qquad \textbf{(1-1.1)}$$

由於認為Berger對「discriminator只挑選兩次行為作觀察」-不合理

=>提出觀察3次以上的間接互助模型
=>按照比例的間接互助模型

《判準 2》

當 discriminator 遇到需要幫助的人，會觀察這個人過去有機會助人時的行為，並從中隨機挑取三次，如果其中至少有兩次他幫助了別人，discriminator 就會視這個人為好人，並決定給予幫助。反之，則決定不幫助他。

我們同樣假設在離散時間 t 時，discriminator 成功助人的機率為 p_t，而 cooperator 及 defector 成功助人的機率分別會是 $\overline{\alpha}=1-\alpha$ 和 0。同時我們以 c_t 表示隨機選出的一個 discriminator 過去(時間點 0, 1, ⋯, $t-1$ 時)助人次數的期望值，並以 a_t 表示其過去幫助人的頻率(即成功助人的機率，故 $a_t=\dfrac{c_t}{t}$)；並以 $g_x(t)$、$g_y(t)$ 以及 $g_z(t)$ 表示隨機選出的一個 cooperator、defector 及 discriminator 在離散時間 t 時名聲很好(即受觀察的三次中，有兩次以上助人行為)的機率，則

$$
\begin{aligned}
&g_x(t)=(1-\alpha)^3+C_2^3(1-\alpha)^2\alpha=(1-\alpha)^2(1+2\alpha),\\
&g_y(t)=0,\\
&g_z(t)=a_t^{\,3}+C_2^3a_t^{\,2}(1-a_t)=-2a_t^{\,3}+3a_t^{\,2}.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
p_t&=\overline{\alpha}\left[x\cdot g_x(t)+y\cdot g_y(t)+z\cdot g_z(t)\right]\\
&=\overline{\alpha}\left[x(1-\alpha)^2(1+2\alpha)+z(-2a_t^{\,3}+3a_t^{\,2})\right]
\end{aligned}
$$

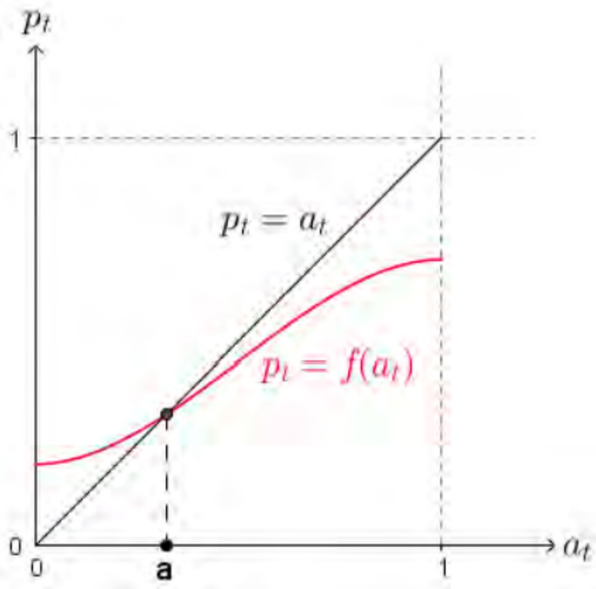
確定隨著時間的推進，discriminator是否收斂到不動點?

如果我們將 p_t 視為變數 a_t 的一個函數

$$\begin{aligned} p_t = f(a_t) &= \overline{\alpha}\left[x(1-\alpha)^2(1+2\alpha)+z(-2a_t^3+3a_t^2)\right] \\ &= \overline{\alpha}\left[-2za_t^3+3za_t^2+x(1-\alpha)^2(1+2\alpha)\right] \end{aligned}$$

由於 $f(0)=\overline{\alpha}(1-\alpha)^2(1+2\alpha)x>0$ ，而

$$\begin{aligned} f(1) &= \overline{\alpha}\left[z+(1-\alpha)^2(1+2\alpha)x\right] \\ &\le z+(1-\alpha)^2(1+\alpha)^2 x \\ &= z+(1-\alpha^2)^2 x \\ &\le z+x\le 1 \end{aligned}$$



圖一

並且 $f'(a_t)=\overline{\alpha}\left[-6za_t^2+6za_t\right]=6\overline{\alpha}za_t(1-a_t)$。由於在 $0\le a_t\le 1$ 之間，$0\le a_t(1-a_t)\le\frac{1}{4}$ ，

所以 $0\le f'(a_t)\le\frac{3\overline{\alpha}z}{2}$ ，故可得知若 $\overline{\alpha}z\le\frac{2}{3}\Rightarrow f'(a_t)\le 1$，則 $p_t=f(a_t)$ 的圖形與直線 $p_t=a_t$ 在 $(0,1)$ 間有唯一的交點，如下圖一所示。

=>

如圖一，橫軸為a_t，縱軸為p_t，$p_t=f(a_t)$與$p_t=a_t$的圖形交於(a,a)，其中$0<a<1$。

當$0\le a_t<a$時，$a_t<p_t<a$，因此$a_t<a_{t+1}<p_t<a\Rightarrow a_t\nearrow a$，

當$a<a_t\le 1$時，$a_t>p_t>a$，因此$a_t>a_{t+1}>p_t>a\Rightarrow a_t\searrow a$，

而當$a_t=a$時，$p_t=a_t=a$，因此$a_{t+1}=a=a_t$為一個不動點，此時

$$a=\bar{\alpha}\left[-2za^3+3za^2+(1-\alpha)^2(1+2\alpha)x\right]$$

整理得到三次方程式$2\bar{\alpha}za^3-3\bar{\alpha}za^2+a-\bar{\alpha}(1-\alpha)^2(1+2\alpha)x=0$

$$\Leftrightarrow 2\bar{\alpha}za^3-3\bar{\alpha}za^2+a-\bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x=0$$

帶入公式解得知：當$\bar{\alpha}z\le\frac{2}{3}\Rightarrow\left(\frac{2\bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x+\bar{\alpha}z-1}{8z}\right)^2+\left(\frac{2-3\bar{\alpha}z}{12\bar{\alpha}z}\right)^3>0$，則此方程式有唯一的實根

$$a=\frac{1}{2}+\sqrt[3]{\frac{2\bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x+\bar{\alpha}z-1}{8z}+\sqrt{\left(\frac{2\bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x+\bar{\alpha}z-1}{8z}\right)^2+\left(\frac{2-3\bar{\alpha}z}{12\bar{\alpha}z}\right)^3}}$$
$$+\sqrt[3]{\frac{2\bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x+\bar{\alpha}z-1}{8z}-\sqrt{\left(\frac{2\bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x+\bar{\alpha}z-1}{8z}\right)^2+\left(\frac{2-3\bar{\alpha}z}{12\bar{\alpha}z}\right)^3}}$$

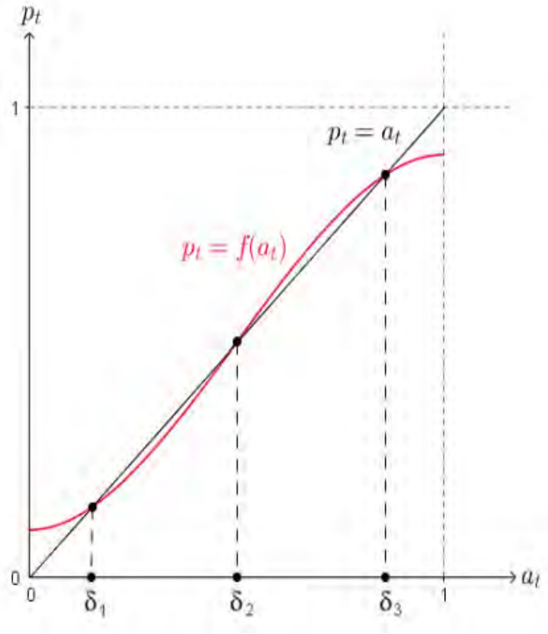
並且$0<a<1$，故

$$p=\lim_{t\to\infty}p_t=\lim_{t\to\infty}f(a_t)=f(a)=a$$

可以得到p_t會收斂至一個不動點$p=a$。

然而，$p_t = f(a_t)$ 與 $p_t = a_t$ 的圖形在 $(0,1)$ 之間也可能有三個交點。如下圖二所示：

若 $p_t = f(a_t)$ 與 $p_t = a_t$ 的圖形交於 $(\delta_1,\delta_1),(\delta_2,\delta_2),(\delta_3,\delta_3)$ 三點，其中 $0<\delta_1<\delta_2<\delta_3<1$，



圖二

當 $0 \le a_t < \delta_1$ 時，$a_t < p_t < \delta_1$，因此 $a_t < a_{t+1} < p_t < \delta_1 \Rightarrow a_t \nearrow \delta_1$，

當 $\delta_1 < a_t < \delta_2$ 時，$a_t > p_t > \delta_1$，因此 $a_t > a_{t+1} > p_t > \delta_1 \Rightarrow a_t \searrow \delta_1$，

當 $\delta_2 < a_t < \delta_3$ 時，$a_t < p_t < \delta_3$，因此 $a_t < a_{t+1} < p_t < \delta_3 \Rightarrow a_t \nearrow \delta_3$，

當 $\delta_3 < a_t \le 1$ 時，$a_t > p_t > \delta_3$，因此 $a_t > a_{t+1} > p_t > \delta_3 \Rightarrow a_t \searrow \delta_3$，

而當 $a_t = \delta_1$ 或 δ_2 或 δ_3 時，$p_t = a_t$，因此 $a_{t+1} = a = a_t$ 為不動點。故可得知：

當 $0 \le a_t < \delta_2$，a_t 會收斂到 δ_1，而當 $\delta_2 < a_t \le 1$，a_t 會收斂到 δ_3，

只有 $a_t = \delta_2$ 時，a_t 才會收斂到 δ_2。

右邊推得定理二

定理 2：當 discriminator 照著《判準 2》幫助別人時，p_t 必定收斂至一不動點 p，

其中 p 是方程式

$$a = \bar{\alpha}\left[-2za^3 + 3za^2 + (1-\alpha)^2(1+2\alpha)x\right] \qquad \textbf{(1-2.1)}$$

在 $(0,1)$ 間的實根。

若上式(1-2.1)在 $(0,1)$ 間有三實根 $\delta_1 < \delta_2 < \delta_3$，則

$$p = \begin{cases} \delta_1, \text{ 當 } \delta_2 > \frac{1}{2}, \\ \delta_2, \text{ 當 } \delta_2 = \frac{1}{2}, \\ \delta_3, \text{ 當 } \delta_2 < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

「提出觀察3次以上的間接互助模型」總結

在這個模型中，雖然 discriminator 成功助人的機率 p_t 仍然會收斂，然而要得知其確實收斂到那一個不動點，與方程式 $2\bar{\alpha}za^3-3\bar{\alpha}za^2+a-\bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x=0$ 在 $(0,1)$ 之間有幾個實根，以及其實根值的大小有關。必須透過複雜的計算才能得知 discriminators 的行為，可以想見，若是挑選四次以上的行為來觀察，就要解四次方程式，計算會更為困難。我們推測這就是原作者 Berger 只選擇挑兩次來觀察的原因。

《判準 3-1》

當 discriminator 遇到需要幫助的人，會觀察這個人過去有機會助人時的行為，並從中隨機挑取兩次，如果兩次他都幫助了別人，則 discriminator 就決定幫助他，若是其中只有一次他幫助了別人，則 discriminator 決定要幫助他的機率為 $\frac{1}{2}$，但若他兩次都沒有幫助別人，discriminator 就選擇不幫助他。

我們同樣假設在離散時間 t 時，discriminator 成功助人的機率為 p_t，而 cooperator 及 defector 成功助人的機率分別會是 $\overline{\alpha}=1-\alpha$ 和 0。同時我們以 c_t 表示一個 discriminator 過去(時間點 0, 1, $\cdots$, $t-1$ 時)助人次數的期望值，並以 a_t 表示其過去助人的頻率(即成功助人的機率，故 $a_t=\frac{c_t}{t}$)。

我們接著要證明隨著時間的推進 p_t 會收斂到不動點 p。

證明的結論

定理 3：當 discriminator 照著《判準 3-1》幫助別人時， p_t **必定收斂至一不動點** p **。**

$$p = \frac{\bar{\alpha}^2 x}{1 - \bar{\alpha} z} \tag{1-3.1}$$

=>可以知道獲得效益的期望值

將其推導觀察n次

《判準 3-2》

當 discriminator 遇到需要幫助的人，會觀察這個人過去有機會助人時的的行為，並從中隨機挑取 n 次，如果 n 次中他幫助了別人 k 次，則 discriminator 幫助他的機率為 $\frac{k}{n}$。

☆ 得到與使用《判準 3-1》完全一樣的結果！

總結

如果 discriminator 使用《判準 3-2》，將觀察到的助人比例做為決定幫助對方的機率，無論選擇觀察幾次，得到的結果都會跟『只觀察一次』就決定是否幫助他一樣。

這使得我們提出來的判準辦法可以不受觀察次數的限制，不論觀察幾次，都有唯一的不動點，而且不論每位 discriminator 決定觀察幾次，只要三種人的比例和助人成功率決定了，其成功助人的機率都會收斂到同一個 p。而且其公式簡單易算，因此我們認為這是一個較佳的間接互助模型。

演化過程

(二) 演化機制

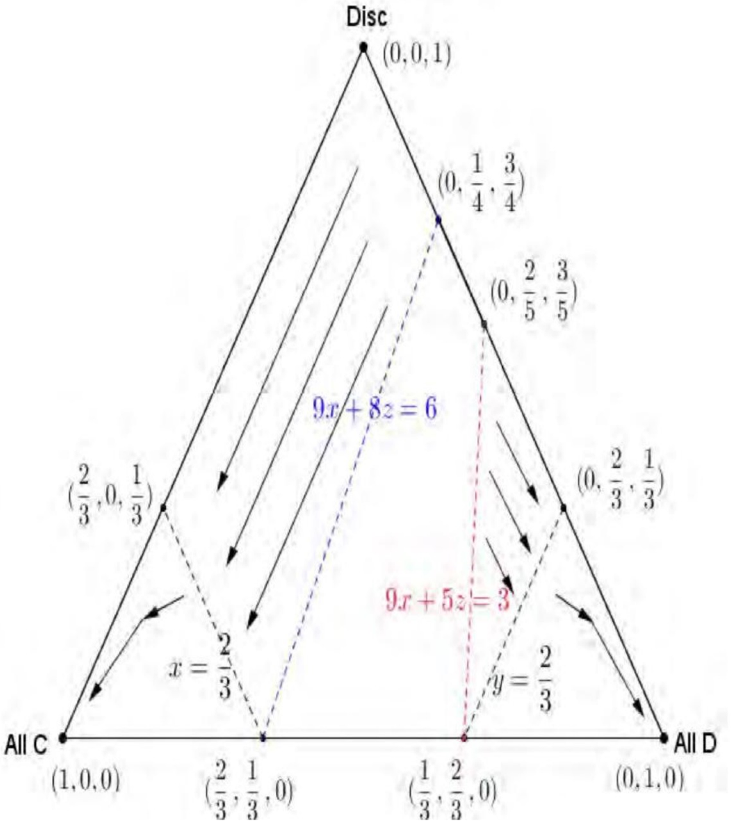
在 Berger(2011)的模型中，假設助人成功時，會帶給助人者自身利益減損 c 單位效用(utility)，而此時受到幫助的人其效用可提升 b 單位，並且 $b > c > 0$，因此，根據三種人的人數比例(x, y, z)，可得到其獲得效益的期望值，計算出三種人的最佳回應範圍(Best-response regions)，並將其當作一種演化機制。比如說，在某個人數比例(x, y, z)時，若 cooperator 的效益期望值最高，則這種人的人數便會增加；反之，效益期望值較低的族群，則人數會減少。

演化結果

假設：

《演化機制》

1. 經過一段時間後，如果一個人需要幫助時得到幫助的比例大於 H，則他會受到鼓勵而更樂於助人，defector 會因此轉變為 discriminator，discriminator 會決定成為 cooperator，而 cooperator 則會繼續當 cooperator。
2. 反之，若一個人得到的幫助比例小於 L，則他會變得比較冷漠，從 cooperator 變成一個 discriminator，或者由 discriminator 變成一個 defector。



當 $9x+8z>6$ 時，discriminator 漸漸演化為 cooperator，直到 cooperator 的比例 $x>\frac{2}{3}$，defector 也開始演化為 discriminator，再變成 cooperator，至終所有人都成為 cooperator。

反之，若 $9x+5z<3$，則 discriminator 會漸漸演化為 defector，直到 defector 的比例 $y>\frac{2}{3}$，cooperator 也會轉變為 discriminator 然後變成 defector，至終所有人都成為 defector。

由於當 $9x+8z=6$ 時，discriminator 獲得幫助的機率期望值正好是 $\frac{2}{3}$，因此必定有部分的 discriminator 獲得幫助的比例大於 $\frac{2}{3}$，因此 cooperator 的人數會增加，使得演化後 $9x+8z>6$，故仍會使所有人漸漸演化為 cooperator。同理，當 $9x+5z=3$ 時，演化的結果也會是全部變成 defector。而當 $9x+8z<6$ 且 $9x+5z>3$，由於所有人獲得幫助的機率期望值都介於 $\frac{1}{3}$ 到 $\frac{2}{3}$ 之間，因此不會有演化行為。

結論

1.不管使用哪一種準則，discriminator助人準則其成功幫助別人的期望值都會收斂到不動點。

2.discriminator在藉由觀察助人比例做為助人標準情況下，不論觀察幾次其結果皆與「只觀察一次，就決定幫助」一樣。

三等獎

–格子點上選擇位置之性質研究–

組合數學、遞迴數列、歸納法

摘要

開始:

一群陌生人在坐一排座位時常不與他人鄰座，對此現象建立了一對數學模型探討。

研究:

・一維的情況下，能坐下的人數、以及若第一個人策略性的選擇，其至多能坐下的人數及策略、和隨著椅子數的增加至多能坐下的人數之變化。

・二維的情況，推導出在正方形的格子點中能坐下的人數。

作法與問題:

1.處理得到遞迴函式---常會遇到帶有高斯符號或是分段的遞迴函式

2.先猜出遞迴式的通式再歸納---二維以上的一般情況會因沒有規律而導不出完整的結論

第一種情形

從所有點中選擇出一點，比較第一分量小者優先，又相同時第二分量小者優先， 依此類推。

在一維 $\mathbb{R}^1$ 數線上，$I_1=[1,n]$ 中的 n 個格子點為座位，則這群人選擇座位的方式:

(1) 當第一個人坐在角落(座標 $A(1)$)時:能坐下的人數為

$$c(x)=\begin{cases}(2^{k-1}+1),\text{if } x=2^k+m\ (k\geq 2,1\leq m\leq 2^{k-1})\\(2^{k-1}+m),\text{if } x=2^k+2^{k-1}+m\ (k\geq 2,1\leq m\leq 2^{k-1})\end{cases}\quad \text{對於 } x\geq 4.$$

(2) 當第一個人任意決定位置時，選擇的座標為 $2^{\lfloor \log_2(n-1)\rfloor}+1$ 時能坐下最多人。

(3) 承上，此時能坐下的人數為 $g(n)=(\dfrac{x+1}{2})+c(n-x+1)$ ，其中 $x=2^{\lfloor \log_2(n-1)\rfloor}+1.$

(4) 承上，每增加一張座位時，能坐下的人數最大值之變化函數如下:

$$g(n)-g(n-1)=\begin{cases}0,\text{if } x=2^k+m\ (k\geq 2,1<m\leq 2^{k-1}+1)\\1,\text{if } x=2^k+2^{k-1}+m\ (k\geq 2,1<m\leq 2^{k-1}+1)\end{cases}.$$

第二種情況

視為有一批人，同時選定所有那樣的位置並坐下。 令 所有點皆被同時選取，若所有點中有部分點相鄰時，我們允許同次選擇者鄰座。

在一維 $\mathbb{R}^1$ 數線上，$I_1=[1,n]$ 中的 n 個格子點為座位，則這群人選擇座位的方式:

(1) 當第一個人坐在角落(座標 $A(1)$)時，能坐下的人數如下:

$d(n)=n-2^t$ ，其中 t 滿足 $2^{t+1}+2^t\ge n>2^t+2^{t-1}$.

(2) 當第一個人任意決定位置時，選擇的座標為 2^k+2^{k-1} 時能坐下最多人，其中

$n\ge 2^k+2^{k-1}>\dfrac{n}{2}$.

(3) 承上，此時能坐下的人數為 $h(n)=2^k+d(n-2^k+2^{k-1}+1)-1$ ，其中 $n\ge 2^k+2^{k-1}>\dfrac{n}{2}$.

(4) 承上，每增加一張座位時，能坐下的人數最大值之變化函數如下:

$$\Delta h(n)=\begin{cases}2^{t-2}-2^t\text{ ,if } n=(2^k+2^{k-1})+(2^t+2^{t-1})-1\text{ ,}2\le t<k\\-1\text{ ,if } n=(2^k+2^{k-1})+5\text{ ,}2\le t<k\\0\text{ ,if } n=1\vee 3\vee(2^k+2^{k-1})\vee(2^k+2^{k-1})+2\text{ ,}2\le k\\1\text{ ,if else.}\end{cases}$$

在二維$\mathbb{R}^2$平面上，I_2中的格子點為座位，則這群人選擇座位的方式:

(5)當$I_2=[1,n]\times[1,n]$時，當第一個人做角落時(座標$A(1,1)$)，能坐下的人數為:

$$d(n,n)=6\cdot 4^{k-1}+(m-1)\cdot 2^{k+1}+\frac{m(m-1)}{2}.$$

(6)當$I_2=[1,n]\times[1,m]$時($n\geq m$)，能坐下的人數滿足

$$d(n,m)=\begin{cases}2a(\frac{n+m-1}{2},n-m+1)\ ,\text{if } 2\nmid n+m\\ 2a(\frac{n+m}{2},n-m+1)-m\ ,\text{if } 2\mid n+m\end{cases}.$$

其中，

$$a(n,k)=\begin{cases}a(\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor,\left\lfloor k-\frac{n}{2}\right\rfloor)+m\times d(\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor)-m\cdot f_n\ ,\text{if } k>\frac{n}{2}\\ [a(\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor,k)+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\times d(\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor)]+a(\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor,1)-\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\cdot f_n\ ,\text{if } k\leq\frac{n}{2}\end{cases}$$

$$f_n=n-2\cdot\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor.$$

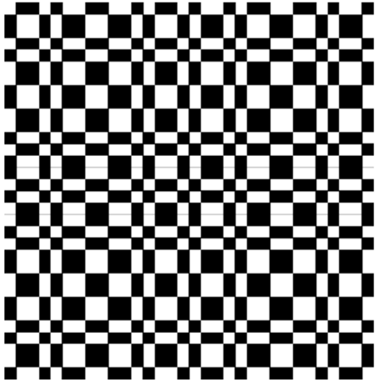
且當$n=2^{k+1}+2^k+m,1\leq m\leq 2^{k+1}+2^k$時，$a(n,1)=6\cdot 4^{k-1}+(4m+1)\cdot 2^{k-1}+\dfrac{m(m+1)}{2}$.

三等獎

作品名稱 翻轉塗色

目的:探討像 10010110011010010110100110010110…，這樣使用 對偶塗色法的字串中有多少同字元的 3-AP

研究方法



將 3-AP 分類： 將 3-AP 分為兩類：

- **第一類：** 完全位於字串前半部分或後半部分的 3-AP。
- **第二類：** 跨越字串中點的 3-AP。

利用對稱性： 根據對偶塗色的對稱性，將第二類 3-AP 分解成更小的子結構，並利用遞迴關係計算其數量。
計算總的 3-AP 數量： 將第一類和第二類 3-AP 的數量相加，得到整個字串中 3-AP 的總數量。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

研究結果

對偶塗色有效減少 3-AP： 透過對偶塗色，可以顯著減少字串中出現 3-AP 的數量。
漸進式分析： 當字串長度趨於無窮大時，對偶塗色下 3-AP 的數量與隨機塗色下的平均數量非常接近。
對數關係： 3-AP 的數量與字串長度的對數成正比。
其他長度子序列： 除了 3-AP，研究還發現對偶塗色對於 4-AP、5-AP 等更長子序列的數量也有類似效果。

結論:

對偶塗色是一種有效的減少字串中同色連續子序列的方法。

四等獎

攜手共解圓-扭結理論之探討

目的

一、 探討在牽手遊戲的各種牽手情況下，能否直接看出該情況是否可解。

二、 找出較特別且有規律的圖形的簡化方式，並發展特殊牽手遊戲的解法。 三、找出可化簡結的方法，並證明其結的不變量是正確且這些方法是夠用的。 四、尋找將結簡化的方法及步驟，並證明得到的方法可以通用在所有結。

研究過程

一、參考資料整理與名詞定義

二、 規則定義與研究在不同的最少人數中所結成的結

三、星星結與特殊牽手遊戲

四、找出簡化任何結的方法與通式

研究結果

一、 三人遊戲、四人遊戲皆無法成結；五人遊戲有兩種情況會成結；六人一封閉曲線有 12 種情況會成結；六人二封閉曲線有 5 種情況會成結(圖形詳見研究過程)。可以從 最少人數、牽手順序及交錯點數量來判斷一結是否成結。因為人可以算是線上一點， 一條線上可以有無限多人，所以同一種結可能由不同的人數所牽成。

二、「星星結」有一定的簡化規律性，在簡化時只需要看牽手順序，不需要管交錯點編 碼。

三等獎

從 A 到 B 再到 C —從組合數學觀點及生成函數來看

Avoid 數列及其多項式組合係數 B

研究動機

對於排列組合數學中避免特定序列的方法，是一個已經提出很久的問題，而對於長度為 n，避免同一物連續出現兩次的方法。既然知道避免同一物 連續出現兩次的方法數，那避免同一物連續出現 m 次的方法為何呢?

研究目的

一、 以排列組合證明A(t,n,m,j)之遞迴

二、 以排列組合證明B(n,m,j,i)之遞迴

三、 計算A(t,n,m,j)和B(n,m,j,i)之生成函數及B(n,m,j,i)用 C 表示的一般式

四、B(n,m,j,i)的常態分佈

定義

$A(t,n,m,j)$表示

在 t 類不同物 $\{x_1,x_2,x_3,...,x_t\}$ 中選取 n 個並做排列，避免 $x_1\cdots x_1$ 連續 (m個x_1)、避免 $x_2\cdots$ x_2 連續 (m個x_2)、⋯、避免 $x_j\cdots x_j$ 連續 (m個x_j) 出現的**方法數**。

$B(n,m,j,i)$ 表示

在 j 類不同物 $\{x_1,x_2,x_3,...,x_j\}$ 中選取 i 個並和 $n-i$ 個**空格**做排列，並避免 $x_1\cdots x_1$ 連續 (m個x_1)、避免 $x_2\cdots x_2$ 連續 (m個x_2)、⋯、避免 $x_j\cdots x_j$ 連續 (m個x_j) 出現的**方法數**。

研究過程：

1. 以較直接且簡單的排列組合證明避免同一物連續出現 m 次數的方法數 A 之遞迴式
2. 以排列組合證明 B 的遞迴式，並找出選取個數小於 m 時之一般式
3. 以生成函數計算 B 及 A，並計算 B 的一般式
4. 發現 B 的大小隨著選取個數接近常態分佈

研究結果與結論

1: 令生成函數 $R_{m,j}^{t}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A(t,n,m,j)x^{n}$ ，則：

$$R_{m,j}^{t}(x)=(1-x^{m})\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(tx-(j-1)x^{m}-(t-j)x^{m+1}\right)^{k}\right)$$

2: 令生成函數 $G_{m,j}(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}B(n,m,j,i)x^{n}y^{i}$ ，則：

$$G_{m,j}(x,y)=\left(1-(xy)^{m}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left((1+jy)x-(j-1+x)(xy)^{m}\right)^{k}\right)$$

研究結果與結論

3: 固定避免最小連續長度 m、有限制元素類數 j 及選取元素個數 i，

$B(n,m,j,i)$呈現一遞迴關係：

$$B(n,m,j,i)=j^i+\sum_{k=1}^{i}(-1)^{k-1}\binom{i}{k}B(n-k,m,j,i)$$

4: 已知 $B(i,m,j,i)$, …, $B(2i\text{-}1,m,j,i)$共 i 個值

$$y_k=\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l\binom{k}{l}B(i+k-l-1,m,j,i)$$

則： $B(n,m,j,i)=\sum_{r=1}^{i}y_r\binom{n-i+1}{r}$

研究結果與結論

5: $i < m$時，$B(n,m,j,i) = j^i \binom{n}{i}$

6: $B(n,2,1,i) = \binom{n-i+1}{i}$且$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n-i+1}{i} = F(n+2)$

猜想

1: 令函數 $f_{m,j}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)=\frac{B(n,m,j,i)}{A(j+1,n,m,j)}$，發現和常態分佈曲線 $g\left(\frac{i}{n}\right)$ 之誤差值

$\sum_{i}\left(g\left(\frac{i}{n}\right)-f_{m,j}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)\right)^{2}$ 隨著 n 越大而逼近於 0

2: 計算其平均數 $\mu=\sum_{i}\frac{i}{n}\frac{B(n,m,j,i)}{A(j+1,n,m,j)}$，發現隨著 n 越大而趨近於一值

平均數之逼近值				
$m \setminus j$	1	2	3	4
2	0.2771	0.5007	0.6392	0.7239
3	0.3824	0.6102	0.7215	0.7839
4	0.4343	0.645	0.7415	0.796

猜想

3: 計算其變異數$\sigma^2=\sum_i\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{B(n,m,j,i)}{A(j+1,n,m,j)}-\left(\sum_i\frac{i}{n}\frac{B(n,m,j,i)}{A(j+1,n,m,j)}\right)^2$，發現$\sigma^2\times n$隨著$n$越大而趨近於一值

變異數*n 之逼近值				
$m\backslash j$	1	2	3	4
2	0.0899	0.177	0.192	0.1788
3	0.1326	0.2008	0.1868	0.163
4	0.1631	0.2094	0.1858	0.1601