第二組

EGMO 2015考古題

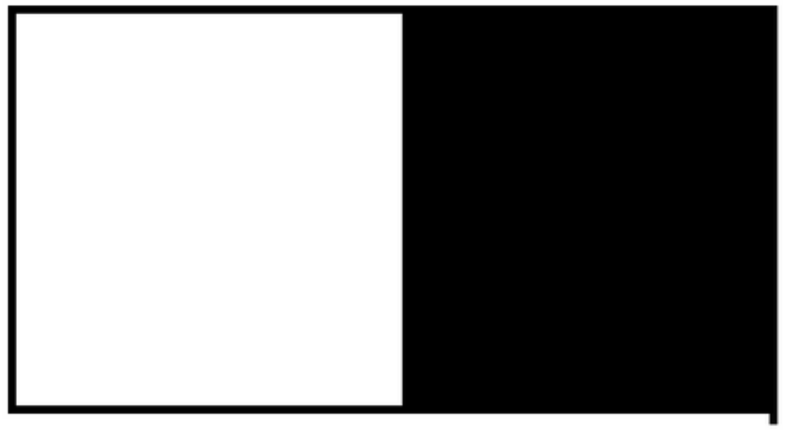
411231201 陳冠章 411031209 謝燿璘
411231113 洪苡宸 411031147 蕭煒磬
411231212 王信融 411231242 蕭應科

Problem 1.

Let △ABC be an acute-angled triangle, and let D be the foot of the altitude from C.
The angle bisector of ∠ABC intersects CD at E and meets the circumcircle ω of triangle △ADE again at F.
If ∠ADF = 45°, show that CF is tangent to ω.

設△ABC為一銳角三角形，並且D為C的垂足。
∠ABC的角平分線與CD相交於E，且又與三角形△ADE的外接圓ω相連於F。
如果∠ADF = 45°，試證CF是ω的切線。

Problem 2.



A domino is a 2×1 or 1×2 tile.

Determine in how many ways exactly n2 dominoes can be placed without overlapping on a $2n \times 2n$ chessboard so that every 2×2 square contains at least two uncovered unit squares which lie in the same row or column.

多米諾骨牌是2×1 或 1×2 的片。

試證有多少種方法可以在不重疊地狀況下的把n^2個多米諾骨牌精確地放入一個$2n \times 2n$的棋盤，

使得每個2×2的方格包含至少2個未覆蓋的單位方格，且這些方格落在同列或同行。

Problem 3.

Let n, m be integers greater than 1, and let a1, a2, . . . , am be positive integers not greater than n^m.

Prove that there exist positive integers b1, b2, . . . , bm not greater than n, such that gcd(a1 +b1,a2 +b2,...,am +bm)<n, where gcd(x1, x2, . . . , xm) denotes the greatest common divisor of x1, x2, . . . , xm.

設n, m為比1大的整數，且設a1,a2,⋯,am為不大於n^m的正整數。

證明存在不大於n的正整數b1, b2, . . . , bm，使得gcd(a1 +b1,a2 +b2,...,am +bm)<n，

而gcd (x1, x2, . . . , xm)表示x1, x2, . . . , xm的最大公因數。

Problem 4.

Determine whether there exists an infinite sequence a1,a2,a3,... of positive integerswhich satisfies the equality：

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

for every positive integer n.

試證是否存在一正整數組成的無窮數列a1,a2,a3,...，對於所有的正整數n，滿足此等式： $a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$

Problem 5.

Let m, n be positive integers with $m > 1$. Anastasia partitions the integers $1, 2, \ldots, 2m$ into m pairs.
Boris then chooses one integer from each pair and finds the sum of these chosen integers.
Prove that Anastasia can select the pairs so that Boris cannot make his sum equal to n.

設m, n為正整數且$m>1$，Anastasia 分割$1, 2, \ldots, 2m$至m對。
接著Boris從每對選了1個整數，且將這些選中的整數相加得到和。
證明Anastasia可以選擇這些配對，使得Boris不能讓他的和等於n值。

Problem 6.

Let H be the orthocentre and G be the centroid of acute-angled triangle $\triangle ABC$ with $AB = AC$.
The line AG intersects the circumcircle of $\triangle ABC$ at A and P.
Let P' be the reflection of P in the line BC. Prove that $\angle CAB=60°$, if and only if $HG=GP'$.

設銳角三角形$\triangle ABC$中，H為垂心且G為質心，其中$AB = AC$ 。
直線AG交$\triangle ABC$的外接圓於A點和P點。
設P'為P對直線BC的對稱點。證明$\angle CAB=60$度，若且唯若$HG=GP'$此狀況成立。

Problem 3.

Let n, m be integers greater than 1, and let $a_1, a_2, \ldots, a_m$ be positive integers not greater than n^m.

Prove that there exist positive integers b1, b2, . . . , bm not greater than n, such that $\gcd(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_m+b_m)<n$, where gcd （$x_1, x_2, \ldots, x_m$） denotes the greatest common divisor of $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

設n, m為比1大的整數，且設$a_1, a_2, \ldots, a_m$為不大於n^m的正整數。

證明存在不大於n的正整數$b_1, b_2, \ldots, b_m$ ，使得

$\gcd(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_m+b_m)<n$，

而gcd（$x_1, x_2, \ldots, x_m$）表示$x_1, x_2, \ldots, x_m$的最大公因數。

Solution 3-1.

不失一般性地假設a1是ai中最小的一個。如果$a_1 \geq n^m-1$，那麼問題很簡單：
要麼全部的ai都相等，或 $a_1 = (n^m) - 1$ 和 $a_j = n^m$ 對於某些 j。
在第一種情況下，我們可以取 $b_1 = 1, b_2 = 2$，b_i的其餘部分可以是任意的，我們有 $\gcd(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_m+b_m) \leq \gcd(a_1+b_1,a_2+b_2) = 1$。
在第二種情況下，我們可以取 $b_1 = 1$，$b_j = 1$，以及 b_i的其餘部分可以是任意正整數，並且$\gcd(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_m+b_m) \leq \gcd(a_1+b_1,a_j+b_j) = 1$。

從現在開始我們可以假設 $a_1 \leq n$^m-2。現在，假設所需的 $b_1,\ldots,bm$ 不存在，並求矛盾。
然後，對於 $b_1 \ldots\ldots b_m \in \{1,\ldots, n\}$ 的任何選擇，
我們有$\gcd(a_1+b_1, a_2+b_2, a_m+b_m) \geq n$。
另外，我們還有$\gcd(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_m+b_m) \leq a_1+b_1 \leq n^m+n-2$。
(a_1最大為n^m-2，b_1最大為n)
因此最大公因數最多有 $n^m - 1$ 個可能值。然而，m-tuple $(b_1,\ldots, b_m)$ 有n^m個選擇。然後，根據鴿籠原理，有兩個m-tuple的最大公因數之（定為 d）產生相同的值。但由於 $d \geq n$，且對每個 i最多可以有一個 $b_i \in \{1,2,\ldots,n\}$ 的選擇，使得（a_i+b_i）可以被 d 整除，因此最多可以有一個 m-tuple $(b_1, b_2,\ldots,b_m)$ 產生d作為最大公因數。這就是我們想要的矛盾(矛盾∵至少兩個vs最多一個，原假設錯誤 ⇒ $\gcd(a_1+b_1,a_2+b_2\cdots a_m+b_m) <n\leq d$)。

Similar Problem of

Problem 3.

設$n=5$, $m=4$為比1大的整數，且設a_1, a_2, a_3,a_4為不大於5^4的正整數。
證明存在不大於5的正整數b_1, b_2, b_3, b_4 ，使得
$\gcd(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,a_4+b_4)<5$，

Solution

不失一般性地假設a1是ai中最小的一個。如果$a_1 \geq 5^4-1$，那麼問題很簡單：
要麼全部的ai都相等（i=1,2,3,4），或 $a_1 = (5^4) - 1$ 和 $a_j = 5^4$ 對於某些 j。
在第一種情況下，我們可以取 $b_1 = 1$, $b_2= 2$，b_i的其餘部分可以是任意的，我們有 $\gcd((5^4) - 1+1,(5^4) - 1+2,(5^4) - 1+b_3,(5^4) - 1+b_4) \leq \gcd(5^4,5^4+1) = 1$。
在第二種情況下，我們可以取 $b_1 = 1$，$b_j = 1$，以及 b_i的其餘部分可以是任意正整數，並且$\gcd((5^4) - 1+1,(5^4)+1,a_3+b_3,a_4+b_4) \leq \gcd(5^4,(5^4)+1) = 1$。

從現在開始我們可以假設 $a_1 \le 5^4-2$。現在，假設所需的 $b_1,\ldots,b_4$ 不存在，並求矛盾。然後，對於 $b_1\ldots\ldots b_4 \in \{1,\ldots, 5\}$ 的任何選擇，
我們有$\gcd(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots ,a_4+b_4) \ge 4$。
另外，我們還有$\gcd(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,a_4+b_4) \le a_1+b_1 \le 5^4-2+4$。
(a_1最大為5^4-2，b_1最大為5)

因此最大公因數最多有 $5^4 - 1$ 個可能值。然而，m-tuple $(b_1,\ldots, b_4)$ 有5^4個選擇。然後，根據鴿籠原理，有兩個m-tuple的最大公因數之（定為 d）產生相同的值。

$$\left.\begin{array}{c}(1,1,1,1,1)\\ \ldots\\ (5,5,5,5,5)\end{array}\right\} 5^4=625\text{種}$$

gcd可能為4,5,...,626,627
共5^4-1=624種可能

但由於 d $\geq$ 5，且對每個 i最多可以有一個 $b_i \in \{1,2,3,4,5\}$ 的選擇，使得（a_i+b_i）可以被 d 整除，因此最多可以有一個 m-tuple $(b_1, b_2,\ldots,b_4)$ 產生d作為最大公因數。這就是我們想要的矛盾(矛盾∵最少兩個vs最多一個，原假設錯誤 $\Rightarrow gcd(a_1+b_1,a_2+b_2\cdots a_4+b_4) <5$)。

eg. 若d值(重複組別的gcd)=9

Case1.

$(a_1, a_2, a_3,a_4)=(8,617,4,16)$

可挑亦只能挑$(b_1, b_2, b_3,b_4)=(1,4,5,2)$

s.t. $gcd(a_1+b_1,a_2+b_2\cdots a_4+b_4)$

$=gcd(9,621,9,18)=d=9$

(一組)

Case2.

$(a_1, a_2, a_3,a_4)=(8,624,4,19)$

挑$(b_1, b_2, b_3,b_4)=(1,?,5,?)$

s.t. $gcd(a_1+b_1,a_2+b_2\cdots a_4+b_4)=1\leq d=9$

(零組)

Case2 延伸討論.

(i)$d=5$

$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(8,624,4,19)$

可挑$(b_1, b_2, b_3, b_4)=(2,1,1,1)$

s.t. $\gcd(a_1+b_1, a_2+b_2 \cdots a_4+b_4)=d=5$

$5 \nmid 8+1$	$5 \mid 624+1$	$5 \mid 4+1$	$5 \mid 19+1$
$5 \mid 8+2$	$5 \nmid 624+2$	$5 \nmid 4+2$	$5 \nmid 19+2$
$5 \nmid 8+3$	$5 \nmid 624+3$	$5 \nmid 4+3$	$5 \nmid 19+3$
$5 \nmid 8+4$	$5 \nmid 624+4$	$5 \nmid 4+4$	$5 \nmid 19+4$
$5 \nmid 8+5$	$5 \nmid 624+5$	$5 \nmid 4+5$	$5 \nmid 19+5$

(ii)$d=9$

$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(8,624,4,19)$

只能挑$(b_1, b_2, b_3, b_4)=(1,?,5,?)$

s.t. $\gcd(a_1+b_1, a_2+b_2 \cdots a_4+b_4)=1 \leq d=9$

$9 \mid 8+1$	$9 \nmid 624+1$	$9 \nmid 4+1$	$9 \nmid 19+1$
$9 \nmid 8+2$	$9 \nmid 624+2$	$9 \nmid 4+2$	$9 \nmid 19+2$
$9 \nmid 8+3$	$9 \nmid 624+3$	$9 \nmid 4+3$	$9 \nmid 19+3$
$9 \nmid 8+4$	$9 \nmid 624+4$	$9 \nmid 4+4$	$9 \nmid 19+4$
$9 \nmid 8+5$	$9 \nmid 624+5$	$9 \mid 4+5$	$9 \nmid 19+5$

多謝聆聽！