數學思維與解題
第四組

411031112 吳昱澄
411031217 周昱凱
411031218 林展鳴
411031226 林宜鋒
411031227 張炘偉

EGMO 2017

Problem 1.

Let ABCD be a convex quadrilateral with ∠DAB = ∠BCD = 90° and ∠ABC > ∠CDA. Let Q and R be points on segments BC and CD, respectively, such that line QR intersects lines AB and AD at points P and S, respectively. It is given that PQ = RS. Let the midpoint of BD be M and the midpoint of QR be N. Prove that the points M, N, A and C lie on a circle.

設 ABCD 為一個凸四邊形，滿足以下條件：

- ∠DAB=∠BCD=90∘
- ∠ABC>∠CDA

設 Q 和 R 分別為線段 BC 和 CD 上的點，使得線 QR 分別與線 AB 和 AD 相交於點 P 和 S。已知 PQ = RS。設 BD 的中點為 M，QR 的中點為N。

證明: 點 M、N、A、C位於圓上(即點 M、N、A、C 共圓)

Problem 2.

Find the smallest positive integer k for which there exist a colouring of the positive integers $Z_{>0}$ with k colours and a function f :$Z_{>0} \to Z_{>0}$ with the following two properties:

(i) For all positive integers m, n of the same colour, f(m + n) = f(m) + f(n).

(ii) There are positive integers m, n such that f(m + n) ≠ f(m) + f(n).

In a colouring of $Z_{>0}$ with k colours, every integer is coloured in exactly one of the k colours. In both (i) and (ii) the positive integers m, n are not necessarily different.

找出最小的正整數 k，使得存在一個正整數的染色方式（將正整數集 $Z_{>0}$ 用 k 種顏色進行染色），以及一個函數 f : $Z_{>0} \to Z_{>0}$，滿足以下兩個條件：

(i) 對於所有正整數 m, n相同顏色，f(m + n) = f(m) + f(n)。

(ii) 存在一些正整數 m、n，使得 f(m + n) ≠ f(m) + f(n)。

在 $Z_{>0}$ 的 k 種顏色著色中，每個正整數都恰好以 k 種顏色中的一種著色。在(i)和(ii)中，正整數m、n不一定不同。

Problem 3.

There are 2017 lines in a plane such that no three of them go through the same point. Turbo the snail sits on a point on exactly one of the lines and starts sliding along the lines in the following fashion: she moves on given line until she reaches an intersection of two lines. At the intersection, she follows her journey on the other line turning left or right, alternating her choice at each intersection point she reaches. She can only change direction at an intersection point.

Can there exist a line segment through which she passes in both directions during her journey?

在平面上有2017條直線，且任三條直線都不經過同一點。蝸牛Turbo坐落在其中一條直線上的某個點，並開始沿著這些直線滑行，移動方式如下：牠沿著指定的直線移動，直到到達兩條直線的交點。牠在交點處，會沿著另一條直線繼續前行，每次在交點處會選擇左轉或右轉且每次交點的選擇都交替變化。她只能在交點處改變方向。

請問，是否存在一條線段，她在滑行過程中會經過並且往返通過該線段？(即是否有可能它在路途中經過同一段線段第二次，但方向與第一次相反)

Problem 4.

Let $n \geq 1$ be an integer and let $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ be positive integers. In a group of $t_n + 1$ people, some games of chess are played. Two people can play each other at most once. Prove that it is possible for the following conditions to hold at the same time:

i) The number of games played by each person is one of $t_1, t_2, \ldots, t_n$,

ii) For every i with $1 \leq i \leq n$, there is someone who has played exactly ti games of chess.

Comment In graph theory terms the problem is to prove that for any finite nonempty set T of positive integers there exists a graph of size $\max T + 1$ such that the degree set of the graph is equal to T . Among graph theory specialists a generalization of this problem is known [1]. Nevertheless, the problem still suited the contest.

設 $n \geq 1$ 為整數，且令 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 為正整數。在t_n+1人的小組中，進行一些西洋棋比賽。兩個人最多可以互相玩一次。證明以下條件可以同時成立：

i) 每個人玩的遊戲次數為 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 之一,

ii) 對於每個 $1 \leq i \leq n$ 的 i，有人恰好下過 t_i 盤西洋棋。

註:在圖論術語中，問題是證明對於任何正整數的有限非空集 T，存在大小為 $\max T + 1$ 的圖，使得該圖的度集等於 T。圖論專家對此問題的概括是眾所周知的[1]。儘管如此，這個問題仍然適合比賽。

Problem 5.

Let $n \geq 2$ be an integer. An n-tuple $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ of not necessarily different positive integers is expensive if there exists a positive integer k such that

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)\ldots\ldots(a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Find all integers $n \geq 2$ for which there exists an expensive n-tuple.

b) Prove that for every odd positive integer m there exists an integer $n \geq 2$ such that m belongs to an expensive n-tuple.

There are exactly n factors in the product on the left hand side.

設 $n \geq 2$ 為整數。如果存在一個正整數k 使得

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)\ldots\ldots(a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}$$

則稱 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$為一個expensive的 n 元組（n-tuple）。

a) 找出所有存在 expensive n-tuple 的正整數 n ，$n \geq 2$。

b) 證明對每個奇數正整數 m，都存在一個整數 $n \geq 2$，使得 m 屬於 expensive n-tuple。

左側的乘積恰好有 n 個因子。

Problem 6.

Let ABC be an acute-angled triangle in which no two sides have the same length. The reflections of the centroid G and the circumcentre O of ABC in its sides BC, CA, AB are denoted by G_1, G_2, G_3, and O_1, O_2, O_3, respectively.

Show that the circumcircles of the triangles G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A and ABC have a common point. The centroid of a triangle is the intersection point of the three medians. A median is a line connecting a vertex of the triangle to the midpoint of the opposite side.

設ABC為銳角三角形，其中沒有兩條邊的長度相同。ABC 的質心 G 和外心 O 在其邊 BC、CA、AB 上的反射分別以 G_1、G_2、G_3 和 O_1、O_2、O_3 表示。證明三角形 G_1G_2C、G_1G_3B、G_2G_3A、O_1O_2C、O_1O_3B、O_2O_3A 和 ABC 的外接圓有公共點。三角形的質心是三個中線的交點。中線是連接三角形頂點和對邊中點的線。

講解:Problem 3

在平面上有2017條直線，且這些直線的任何三條都不經過同一點。蝸牛Turbo可以沿著這些直線滑動，移動方式如下：

1.它最初在某一條直線上移動，並沿著該直線行進，直到到達兩條直線的交點。

2.在交點處，它可以繼續沿另一條直線滑動，並在每次經過交點時輪流向左或向右轉。

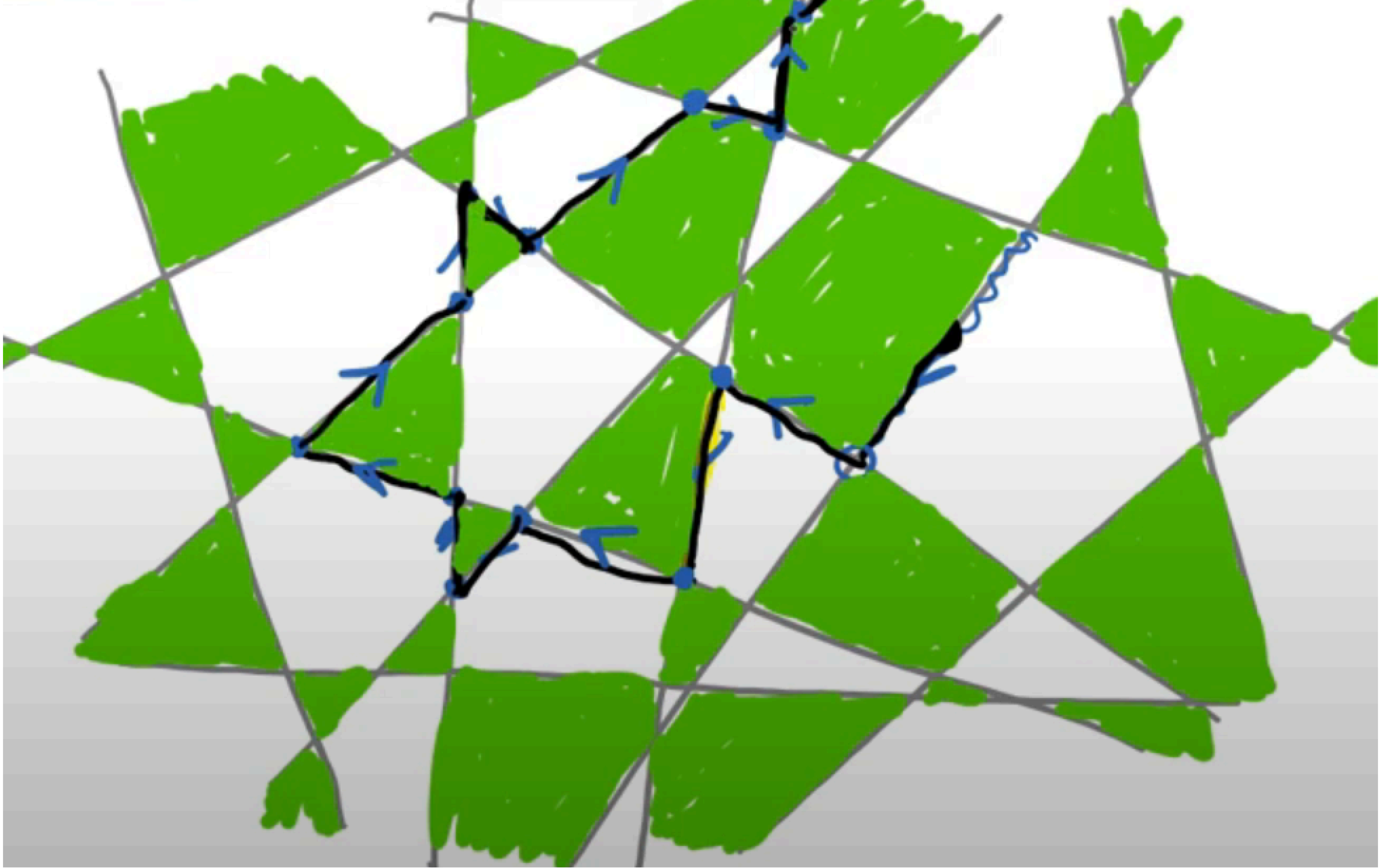
問題是：是否有可能它在路途中經過同一段線段第二次，但方向與第一次相反

Solution:

我們證明這種情況不可能發生。這些直線將平面劃分為不相交的區域。我們聲稱存在一種交替的兩色著色方式，即每個區域都可以被塗成黑色或白色，並且如果兩個區域共享一條線段，那麼它們會有不同的顏色。我們將此結論進行歸納證明。

若沒有直線，這一結論顯然成立。現在假設在平面上有n條直線，並且已經為區域進行了交替兩色著色。如果我們再增加一條直線g，我們可以簡單地將g分割的其中一個半平面中的所有區域的顏色從白色變為黑色，反之亦然。任何不在g上的線段仍然會位於顏色不同的兩個區域之間。而在g上的任何線段會劃分由n條直線劃定的區域，並且由於我們改變了g一側的顏色，這段線段也會位於顏色不同的兩個區域之間。

現在，無損一般性，我們可以假設Turbo在其左側為白色區域，右側為黑色區域的線段上開始滑行。在每一個交點處，如果它向右轉，它將保持黑色區域在右側；如果向左轉，則保持白色區域在左側。因此，不論它滑行到哪裡，它都會始終保持左邊是白色區域，右邊是黑色區域。因此，它只能以左側為白色區域的方向穿越每一段線段，而無法以左側為黑色區域的相反方向穿越同一線段。



相似題:

在三維空間中，有2017條直線，且每兩條直線都相交於一個唯一的點，且沒有三條直線交於同一點。Turbo蝸牛可以沿著這些直線移動，移動方式如下：

1. 初始時，Turbo從某條直線上開始，並沿著該直線移動，直到遇到另一條直線的交點。
2. 到達交點後，Turbo會轉到另一條直線繼續前進，並在每個交點處交替選擇左轉或右轉。

問：是否有可能，Turbo在某條直線的線段上滑行兩次，而且兩次的方向是相反的？

報告結束