EGMO2018

第五組:陳怡傑、黃擎天、蔡孟勳、陳仕銘、李柏勛

PROBLEM 1.

- ABC 是一個三角形，滿足 $CA = CB$ 且 $\angle ACB = 120^{\circ}$，M 是 AB 的中點。令P為三角形 ABC 的外接圓上的一點，Q 是線段 CP 上的一點，使得 $QP = 2QC$。已知通過 P 並且垂直於 AB 的直線與線段 MQ 相交於一個唯一的點 N。

- 證明存在一個固定的圓，使得對於 P 的所有可能位置，點 N 都位於這個圓上。

PROBLEM 2.

- 讓A={ $1+\frac{1}{k}$: k=1,2,3,...}。
- (a)證明每個整數X≧2可以表示為一個或多個來自A的元素的乘積，這些元素不必相同
- (b)對於每個整數X≧2，令f(x)表示最小的整數，使的x可以標示為f(x)個來自A的元素的乘積，這些元素不必相同。證明存在無限多對整數(x,y)，使的x≧2，y≧2，且f(xy)<f(x)+f(y)。如果x1≠x2或y1≠y2，則對(x1,y1)和(x2,y2)這對是不同的

Problem 3

EGMO 的 n 名參賽者分別命名為 $C_1, C_2, \cdots, C_n$。比賽結束後，他們根據以下規則在餐廳前排隊：

評審團選擇參賽者在隊伍中的初始順序。每分鐘，評審團選擇一個整數 i，滿足 $1 \le i \le n$。

如果參賽者 C_i 前面至少有 i 名其他參賽者，她支付一歐元給評審團，並向前移動隊伍中的 i 個位置。 如果參賽者 C_i 前面少於 i 名其他參賽者，餐廳開門，過程結束。

(a) 證明無論評審團的選擇如何，這個過程都不可能無限進行。

(b) 確定對於每個 n，評審團可以通過巧妙選擇初始順序和移動序列來收集的最大歐元數。

PROBLEM 4

- 一個多米諾骨牌是 1×2 或 2×1 的瓷磚。讓 $n\geq3$是一個整數。多米諾骨牌被放置在 $n\times n$的棋盤上，使得每個多米諾骨牌正好覆蓋棋盤的兩個單元格，並且多米諾骨牌不重疊。行或列的值是至少有一個單元格被該行或該列的多米諾骨牌覆蓋的多米諾骨牌的數量。當存在某個 $k\geq1$，使得每一行和每一列的值都為 k 時，這種配置稱為平衡配置。證明對於每個 $n\geq3$存在平衡配置，並找到這種配置所需的最少多米諾骨牌數量。

存在平衡配置的證明

對於 $n \geq 3$，我們可以構造一種平衡配置。考慮以下方法：

- 將多米諾骨牌以棋盤的方式放置。例如，對於 $n=3$的情況，我們可以這樣放置：
- 第一行：放置一個水平的多米諾骨牌在（1,1）和（1,2)。
- 第二行：放置一個水平的多米諾骨牌在（2,1）和（2,2)。
- 第三行：放置一個垂直的多米諾骨牌在（1,3）和（2,3)。

這樣，每一行和每一列都有兩個多米諾骨牌的覆蓋，滿足平衡配置的條件。對於更大的 nn，我們可以用類似的方法進行擴展。具體來說，可以在每個 $2\times22\times2$ 的區域內放置多米諾骨牌，這樣每行和每列的值都可以保持一致。

最少多米諾骨牌的數量

- 為了計算最少的多米諾骨牌數量，我們注意到每個多米諾骨牌覆蓋兩個單元格。因此，總的單元格數量 n^2 被 2除後得到的就是最少的多米諾骨牌數量。
- 因此，對於 n×n的棋盤，最少需要的多米諾骨牌數量為 $\frac{n^2}{2}$（當 n 為偶數）或 $\frac{n^2-1}{2}$（當 n為奇數），但在任何情況下，這個數量都足以滿足平衡配置的條件。
- 總結來說，對於每個 n≥3，存在一個平衡配置，並且所需的最少多米諾骨牌數量為 $\left[\frac{n^2}{2}\right]$。

PROBLEM 5

- 設 Γ 為三角形 ABC 的外接圓。一個圓 Ω 與線段 AB相切，並且在同一側於 AB 的點 C 上與 Γ 相切。角平分線 $\angle BCA$ 與 Ω 相交於兩個不同的點 P 和 Q。
- 證明 $\angle ABP=\angle QBC$。

PROBLEM 6

- (a)證明對於每個實數 t使得 $0<t<\frac{1}{2}$，存在一個正整數 n，使得對於每個 n個正整數的集合 S，存在兩個不同的元素 x 和 y 以及一個非負整數 m（即 $m\geq 0$）使得 $|x-my|\leq ty$。
- (b)判斷對於每個實數 t使得 $0<t<\frac{1}{2}$，是否存在一個無限的正整數集合 S，使得對於 S 中每一對不同的元素 x 和 y以及每一個正整數 m（即 $m>0$），都有 $|x-my|>ty$。

聯想題(PROBLEM4)

題目：對於 $n \times n$ 棋盤，將 1×2的多米諾骨牌平鋪，並要求每一行或每一列的多米諾骨牌數量相等。證明這樣的配置是可行的，並求出最少需要多少塊多米諾骨牌。

聯想題(PROBLEM4)

問題描述：

我們有一個 n×n 的棋盤（其中 n≥2）。

每塊多米諾骨牌是 1×2 的大小，覆蓋棋盤上的兩個單元格。

我們要求找到一種配置，使得每一行或每一列的多米諾骨牌數量相等。

問題理解：

多米諾骨牌數量相等：意味著每行或每列被多米諾骨牌覆蓋的數量要相同。

換句話說，無論是哪一行或哪一列，這些行列上被覆蓋的單元格數量應該一致。

如果我們選擇適當的多米諾骨牌擺放方式，可以滿足這個要求。

聯想題(PROBLEM4)

最少的多米諾骨牌數量：

因為每個多米諾骨牌覆蓋兩個單元格，且棋盤上總共有 n平方個單元格，最多可以放置二分之n平方塊多米諾骨牌。

具體示範解法：

讓我們來考慮幾個具體的情況：

當 n=2n ，棋盤是 2×2，總共 4 個單元格。

我們只需要放置 2 塊多米諾骨牌。顯然，我們可以將兩塊多米諾骨牌平行放置，這樣每一行和每一列都被恰好 1 塊多米諾骨牌覆蓋。這是最簡單的平衡配置。

聯想題(PROBLEM4)

當 n=2n 的配置如下：

其中 H代表水平方向的多米諾骨牌

V代表垂直方向的多米諾骨牌。

每行和每列都有 1 塊多米諾骨牌，

因此滿足平衡配置要求。

$$\begin{bmatrix} H & H \\ V & V \end{bmatrix}$$

聯想題(PROBLEM4)

當 n=4n 的配置如下：

當 $n=4$ 時，棋盤是 4×4，總共 16 個單元格。
我們可以安排 8 塊多米諾骨牌，並且使得每行和每列都有相同數量的多米諾骨牌。
這樣，每行和每列都有 2 塊多米諾骨牌，達到了平衡配置。

$$\begin{bmatrix} H & H & V & V \\ H & H & V & V \\ V & V & H & H \\ V & V & H & H \end{bmatrix}$$

聯想題(PROBLEM4)

結論：

對於任意的n×n棋盤，只要n是偶數，我們可以平衡地放置多米諾骨牌，並且每行每列的多米諾骨牌數量相同。

所需的最少多米諾骨牌數量是二分之n平方，因為每塊多米諾骨牌覆蓋2 個單元格。

謝謝

- 簡報:黃擎天1~4、蔡孟勳5~9、陳仕銘
- 報告:陳怡傑 、 李柏勋