2020 EGMO

第7組　黃柏崴 王琬儀 李彥槿 譚浚邦 楊書婷

目錄大綱

- Problem 1 的原題目及翻譯
- Problem 2 的原題目及翻譯
- Problem 3 的原題目及翻譯
- Problem 4 的原題目及翻譯
- Problem 5 的原題目及翻譯
- Problem 6 的原題目及翻譯
- Problem 6 的一種解答
- Problem 6 的相似題目

Problem 1

Problem 1

The positive integers $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3030}$ satisfy $2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n$ for $n = 0, 1, 2, \ldots, 3028$.
Prove that at least one of the numbers $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3030}$ is divisible by 2^{2020}.

正整數 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3030}$ 滿足
$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n$ 對於 $n = 0, 1, 2, \ldots, 3028$。
證明 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3030}$中至少有一個數可以被 2^{2020}整除。

Problem 2

Problem 2

Find all lists $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ of non-negative real numbers such that the following three conditions are all satisfied:

(i) $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2020}$;

(ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;

(iii) there is a permutation $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ of $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ such that

$$\sum_{i=1}^{2020} \left((x_i + 1)(y_i + 1)\right)^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3$$

A permutation of a list is a list of the same length, with the same entries, but the entries are allowed to be in any order. For example, (2, 1, 2) is a permutation of (1, 2, 2), and they are both permutations of (2, 2, 1). Note that any list is a permutation of itself.

Problem 2

找出所有滿足以下三個條件的非負實數數列 $((x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$：

(i) $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2020}$;，即數列是非遞減的。

(ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$，即數列的最大值不超過最小值加 1。

(iii)存在一個數列 $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ ，它是$(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ 的一個排列，使得

$$\sum_{i=1}^{2020}\left((x_i+1)(y_i+1)\right)^2 = 8\sum_{i=1}^{2020} x_i^3$$

排列是指將一個數列中的元素重新排序，得到的結果中仍然是原數列的元素，但順序可以不同。例如，數列 (2,1,2) 是數列 (1,2,2) 的一個排列，兩者也是數列 (2,2,1) 的排列。任何數列都是它自己的一個排列。

Problem 3

Problem 3

Let ABCDEF be a convex hexagon such that $\angle A = \angle C = \angle E$ and $\angle B = \angle D = \angle F$ and the (interior) angle bisectors of $\angle A$, $\angle C$, and $\angle E$ are concurrent. Prove that the (interior) angle bisectors of $\angle B$, $\angle D$, and $\angle F$ must also be concurrent.

Note :that $\angle A = \angle FAB$. The other interior angles of the hexagon are similarly described.

設 ABCDEF 為凸六邊形，使得 $\angle A = \angle C = \angle E$ 且 $\angle B = \angle D = \angle F$ 還有 $\angle A$、$\angle C$ 和 $\angle E$ 的（內）角平分線相交。

證明 $\angle B$、$\angle D$ 和 $\angle F$ 的（內）角平分線也必須是相交的。

註：$\angle A = \angle FAB$。六邊形的其他內角也依此進行描述。

Problem 4

Problem 4

A permutation of the integers 1, 2, . . . , m is called fresh if there exists no positive integer $k < m$ such that the first k numbers in the permutation are 1, 2, . . . , k in some order.
Let f_m be the number of fresh permutations of the integers 1, 2, . . . , m.
Prove that $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ for all $n \geq 3$.
For example, if $m = 4$, then the permutation (3, 1, 4, 2) is fresh, whereas the permutation (2, 3, 1, 4) is not.

對於整數 1, 2, ... m 的一個排列，如果不存在一個正整數 k<m ，使得排列的前 k 個數字是 1,2,⋯,k的某種順序，那麼這個排列稱為「新鮮排列」。
若 f_m 代表整數 1,2,⋯,m 的新鮮排列數量，請證明對於所有 $n\geq3$，有：$f_n \geq n \cdot f_{n-1}$
舉例：如果 m=4，則排列 (3,1,4,2) 是新鮮排列，而排列 (2,3,1,4) 不是新鮮排列。

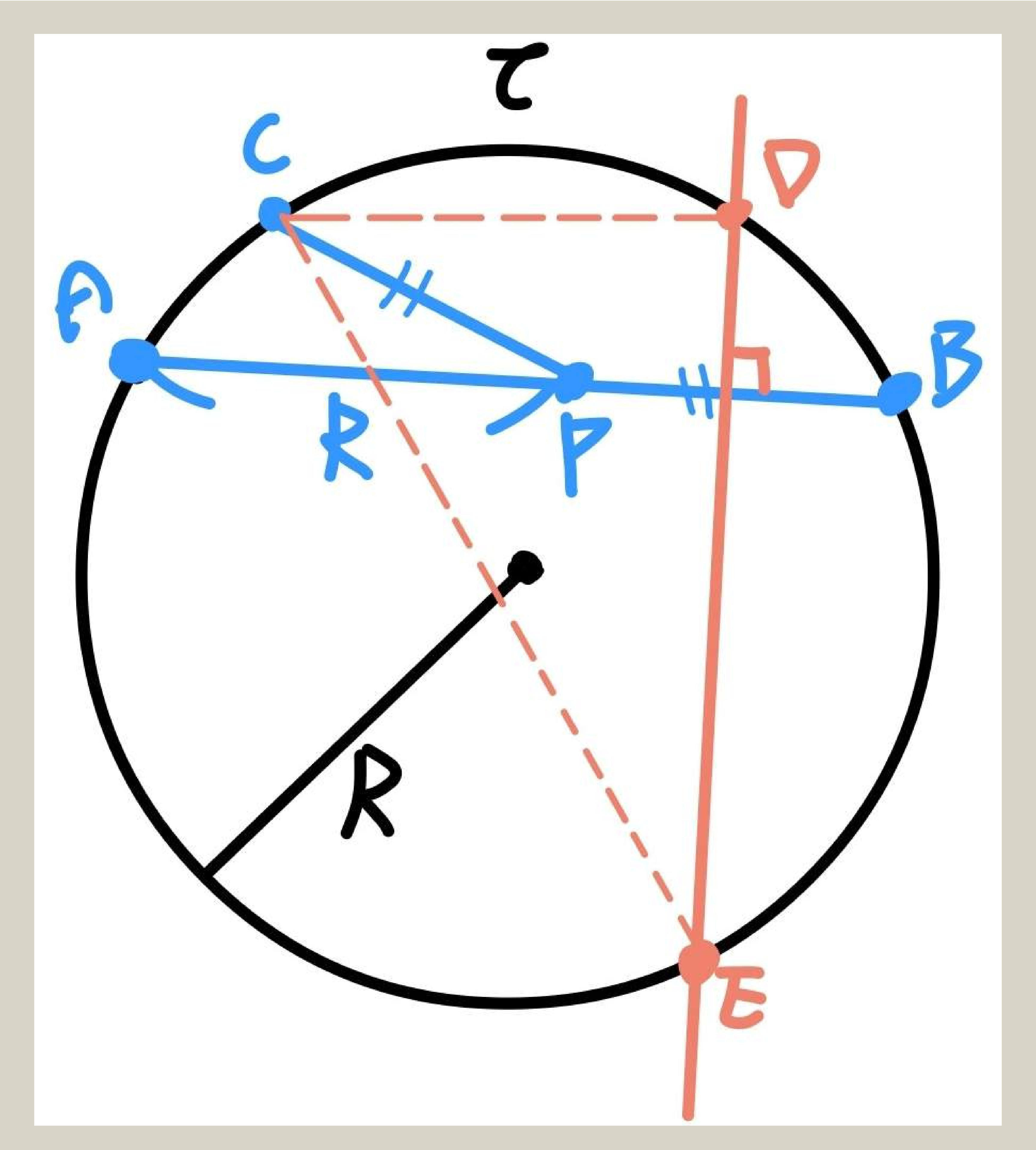
Problem 5

Problem 5

Consider the triangle ABC with $\angle BCA > 90°$.
The circumcircle τ of ABC hasradius R.
There is a point P in the interior of the line segment AB such that P B = P C and the length of P A is R.
The perpendicular bisector of P B intersects τ at the points D and E.
Prove that P is the incentre of triangle CDE.

考慮 三角形 ABC，其中∠BCA > 90° 。
ABC 的外接圓 τ 有半徑R。
線段 AB 內部有一點 P，滿足 PB = PC 且 PA 的長度為 R。
PB 的垂直平分線與外接圓 τ 相交於點 D 和 E。
證明點P是三角形CDE的內心。

Problem 5



Problem 6

Problem 6

Let $m > 1$ be an integer.
A sequence $a_1, a_2, a_3, \ldots$ is defined by
$a_1 = a_2 = 1, a_3 = 4$, and for all $n \geq 4, a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}$.
Determine all integers m such that every term of the sequence is a square.

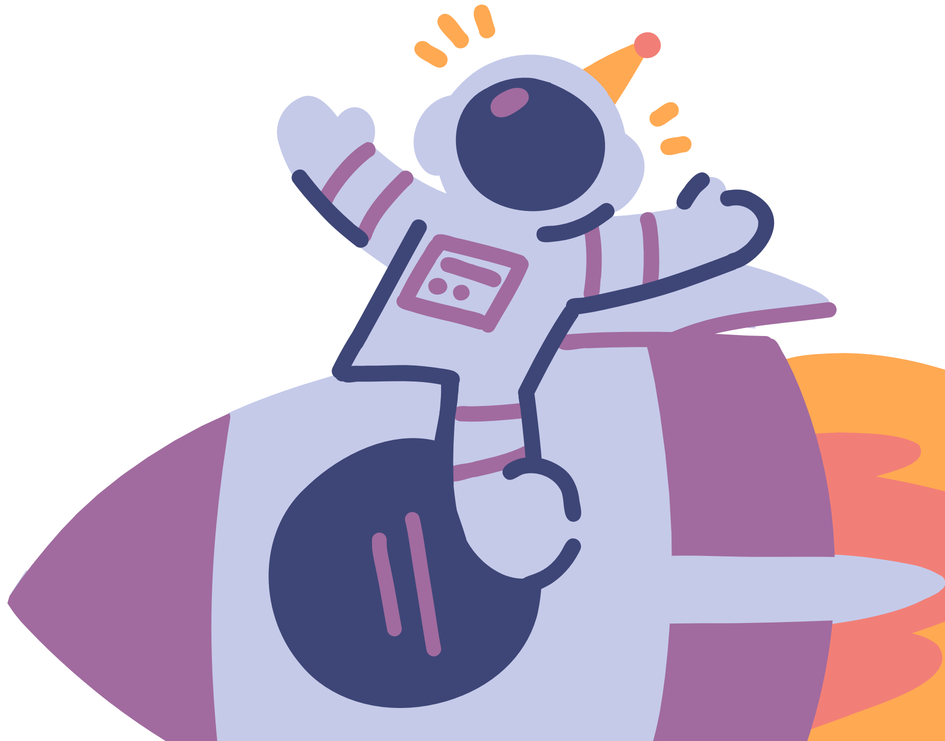
設 $m > 1$ 為一整數。
定義數列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 為：
$a_1 = a_2 = 1$，$a_3 = 4$，
對於所有 $n \geq 4$，$a_n=m(a_{n-1}+a_{n-2})-a_{n-3}$。
求所有使得數列中每一項都是完全平方數的整數 m

Problem 6

Solution

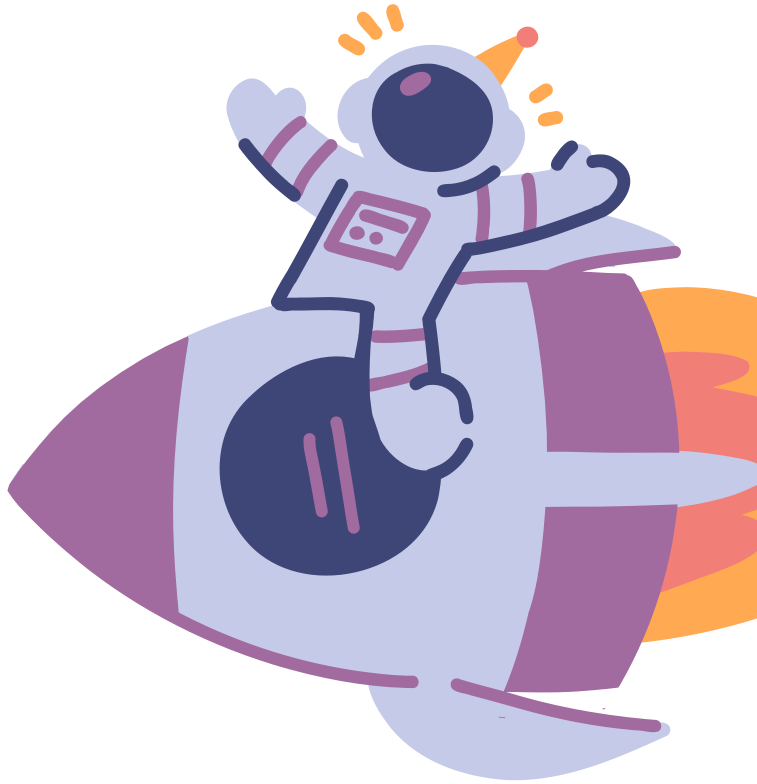
依照題目的遞迴關係，我們可以推導出：

$$a_4 = 5m - 1,$$
$$a_5 = 5m^2 + 3m - 1,$$
$$a_6 = 5m^3 + 8m^2 - 2m - 4$$



Problem 6

Solution



m可以使得每一項皆為完全平方數

則a_4 和 a_6也為完全平方數

兩者的乘積也應是完全平方數

由此我們可以得到：

$$4a_4a_6 = 100m^4 + 140m^3 - 72m^2 - 72m + 16$$

Problem 6

Solution

我們給兩個平方數：$(10m^2+7m-7)^2$和$(10m^2+7m-5)^2$

$$(10m^2+7m-7)^2=100m^4+140m^3-91m^2-98m+49<4a_4a_6$$
$$(10m^2+7m-5)^2=100m^4+140m^3-51m^2-70m+25>4a_4a_6$$

可知$4a_4a_6$在這兩個平方數之間且為平方數

所以$4a_4a_6=(10m^2+7m-6)^2=100m^4+140m^3-71m^2-84m+36$

Solution

$$4a_4a_6 = 100m^4 + 140m^3 - 71m^2 - 84m + 36$$
$$= 100m^4 + 140m^3 - 72m^2 - 72m + 16$$

可以得知 $m^2 - 12m + 20 = 0$

解方程式得解為 $m = 2$ 或 $m = 10$.

Problem 6

相似題

對於一個整數 $m>1$，數列 $b_1, b_2, b_3,\cdots$ 定義如下：

$b_1=1, b_2=4, b_3=9$

並且對於所有 $n\geq 4$，滿足遞迴關係：

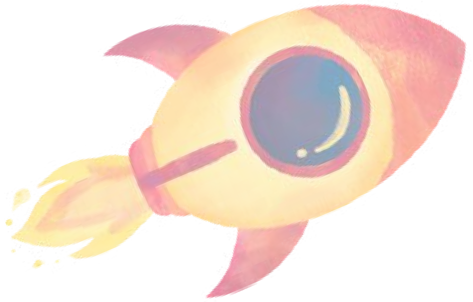
$b_n=m(b_{n-1}+b_{n-2})-b_{n-3}$.

找出所有整數 m 使得數列的每一項 b_n 都是完全平方數。

THANK YOU

for your time and attention

Present by TEAM 7



THANK YOU