第 8 組

數學思維與解題

Problem 1.

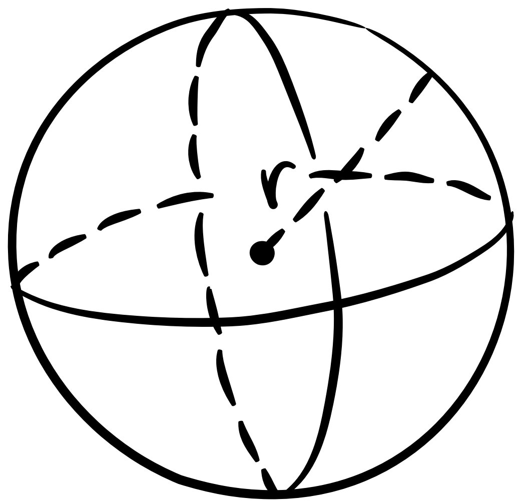
The number 2021 is fantabulous. For any positive integer m, if any element of the set {m,2m+1,3m} is fantabulous, then all the elements are fantabulous. Does it follow that the number 2021^2021is fantabulous?

問題 1：

我們知道 2021 是一個奇妙數字，並且對於任意正整數 m，如果集合 {m,2m+1,3m} 中的任一元素是奇妙數字，那麼集合中的所有元素也必須是奇妙數字。問題是，我們要判斷 2021^2021是否是奇妙數字。

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$y=mx+b$$



$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

Problem 2.

Find all functions f: Q → Q such that the equation f(xf(x) +y) = f(y)+x2 holds for all rational numbers x and y. Here, Q denotes the set of rational numbers.

問題 2：

我們要找出所有滿足以下函數方程的函數f:Q → Q，

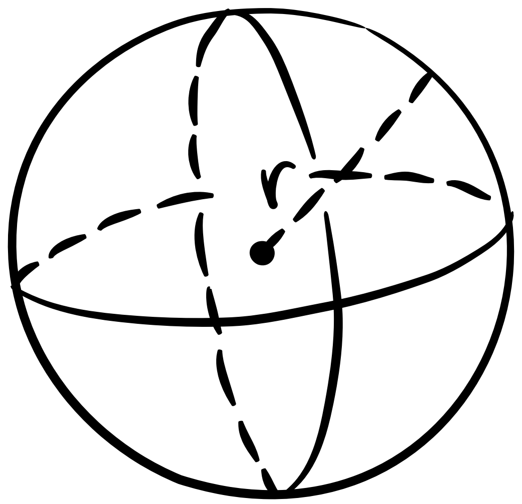
即：

$$f(xf(x)+y)=f(y)+x^{\wedge}2$$

對於所有的有理數x,y∈Q 。

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4a}}{2a}$

$y=mx+b$



$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

Problem 3.

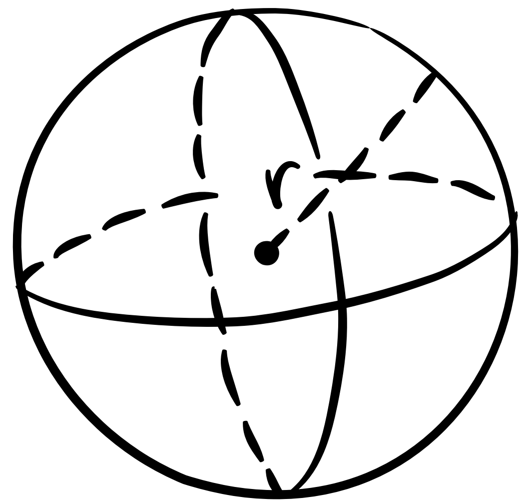
Let ABC be a triangle with an obtuse angle at A. Let E and F be the intersections of the external bisector of angle A with the altitudes of ABC through B and C respectively. Let M and N be the points on the segments EC and FB respectively such that ∠EMA = ∠BCA and ∠ANF =∠ABC. Prove that the points E, F, N, M lie on a circle.

問題 3：

我們有一個三角形 ABC，且角 A 是鈍角。點 E 和 F 分別是角 A 的外角平分線與三角形 ABC 中 B和C 頂點的高的交點。點 M 和 N 分別是線段 EC 和 FB 上的點，使得角∠EMA=∠BCA 和∠ANF=∠ABC。我們需要證明點 E、F、N、M 共圓。

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4a}}{2a}$

$y=mx+b$



$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

Problem 4.

Let ABC be a triangle with incenter I and let D be an arbitrary point on the side BC. Let the line through D perpendicular to BI intersect CI at E. Let the line through D perpendicular to CI intersect BI at F. Prove that the reflection of A across the line EF lies on the line BC.

問題 4：

設三角形 ABC 的內心為 I，且 D是邊 BC上的任意一點。

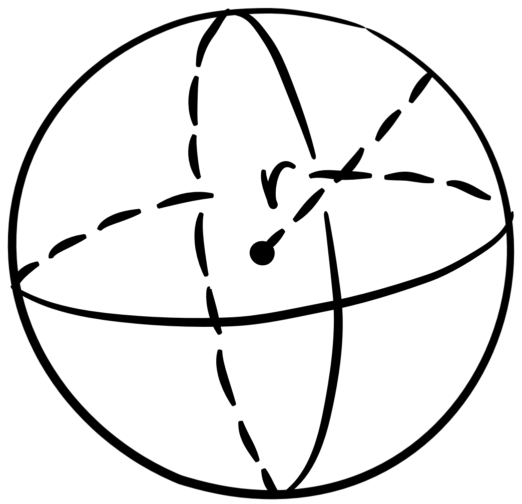
過 D點且垂直於 BI 的直線與 CI 交於 E，

過 D點且垂直於 CI 的直線與 BI 交於 F 。

證明：點 A 相對於直線 EF 的反射點在直線 BC上。

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$y=mx+b$



$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

Problem 5.

A plane has a special point O called the origin. Let P be a set of 2021 points in the plane such that (i) no three points in P lie on a line and (ii) no two points in P lie on a line through the origin. A triangle with vertices in P is fat if O is strictly inside the triangle. Find the maximum number of fat triangles.

問題 5：

有一個平面，設有一個特殊的點 O 作為原點。設P是平面上2021 個點的集合，滿足以下條件：

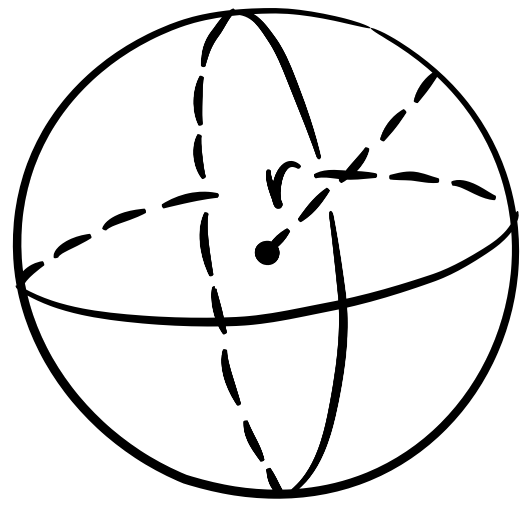
(i) 集合中沒有三點共線。

(ii) 集合中沒有兩點共線於通過原點的直線。

若三角形的頂點在 P 中，且原點 O 嚴格位於三角形內部，則稱這個三角形為“胖三角形”。求胖三角形的最大數量。

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4a}}{2a}$

$y = mx + b$



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Problem 6.

Does there exist a nonnegative integer a for which the equation $\lfloor m/1 \rfloor + \lfloor m/2 \rfloor + \lfloor m/3 \rfloor + \cdots + \lfloor m/m \rfloor = n{}^\wedge 2+a$ has more than one million different solutions (m,n) where m and n are positive integers? The expression $\lfloor x \rfloor$ denotes the integer part (or floor) of the real number x. Thus $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ and $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

問題 6：

是否存在一個非負整數 a，使得方程式

$\lfloor m/1 \rfloor + \lfloor m/2 \rfloor + \lfloor m/3 \rfloor + \cdots + \lfloor m/m \rfloor = n{}^\wedge 2+a$

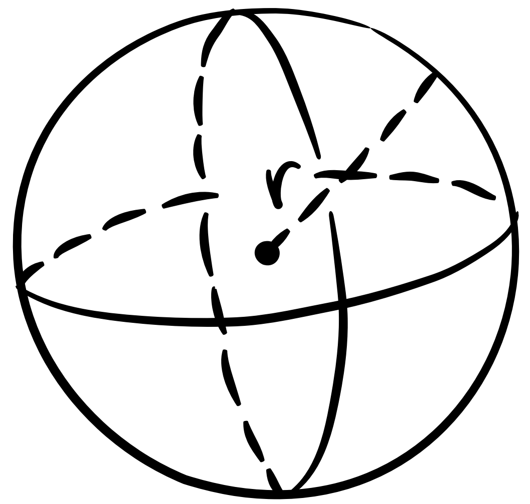
對於正整數 m 和 n，有超過一百萬個不同的解 (m,n)？

其中，符號 $\lfloor x \rfloor$ 表示實數 x 的整數部分（或稱為向下取整）。

例如，$\lfloor \sqrt{2} \rfloor=1$，$\lfloor \pi \rfloor=\lfloor 22/7 \rfloor=3$，$\lfloor 42 \rfloor=42$，且 $\lfloor 0 \rfloor=0$。

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$y=mx+b$$



$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

解題

Problem 1.

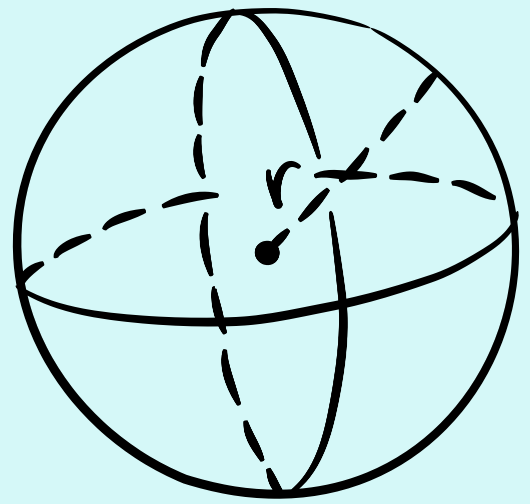
The number 2021 is fantabulous. For any positive integer m, if any element of the set {m,2m+1,3m} is fantabulous, then all the elements are fantabulous. Does it follow that the number 2021^2021is fantabulous?

問題 1：

我們知道 2021 是一個奇妙數字，並且對於任意正整數 m，如果集合 {m,2m+1,3m} 中的任一元素是奇妙數字，那麼集合中的所有元素也必須是奇妙數字。問題是，我們要判斷2021^2021是否是奇妙數字。

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$y = mx + b$$



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

解題

這段推理的核心是利用對一個數字進行一系列變換，來推導出當一個數字 a 是「奇妙數字」時，與之相關的數字（如 $3a, 3a+1, 3a+2$）也會是奇妙數字，反之亦然。最後，這些變換和推導使我們能夠推斷出所有正整數都是奇妙數字，並進一步推導出 2021^2021是「奇妙數字」。

1. 基本的變換規則

首先，我們得到了幾個數字變換的規則，顯示如果某個數字 a 是「奇妙數字」，那麼通過以下變換產生的數字也應該是「奇妙數字」：

$a \to 3a$

$a \to 2a+1 \to 6a+3 \to 3a+1$

$a \to 2a+1 \to 4a+3 \to 12a+9 \to 36a+27 \to 18a+13 \to 9a+6 \to 3a+2$

這些變換展示了當 a 是「奇妙數字」時，相關的數字 $3a, 3a+1, 3a+2$ 等也會是「奇妙數字」，並且這些變換之間形成了鏈條。

2. 與函數 $f(a) = \lfloor a/3 \rfloor$ 的關係

接下來，這段推理指出，當 $a \geq 3$時，數字 a 是「奇妙數字」當且僅當 $f(a) = \lfloor a/3 \rfloor$也是「奇妙數字」。這意味著通過對數字 a 應用函數 f，我們可以將其簡化，並且如果 a 是「奇妙數字」，那麼經過足夠次的應用，最終會到達 1 或 2，這兩個數字也必定是「奇妙數字」。

3. 使用這個規則推導出 1 和 2 是「奇妙數字」

根據以上推理，如果 2021^2021 是「奇妙數字」，那麼我們可以對其進行一系列變換，最終會得到 1 或 2。具體過程如下：

$2021 \to 673 \to 224 \to 74 \to 24 \to 8 \to 2 \to 5 \to 1$ 這樣，我們可以看到通過應用函數 f 並不斷簡化，最終我們會得到 1 或 2，而根據推理，這兩個數字必定是「奇妙數字」。

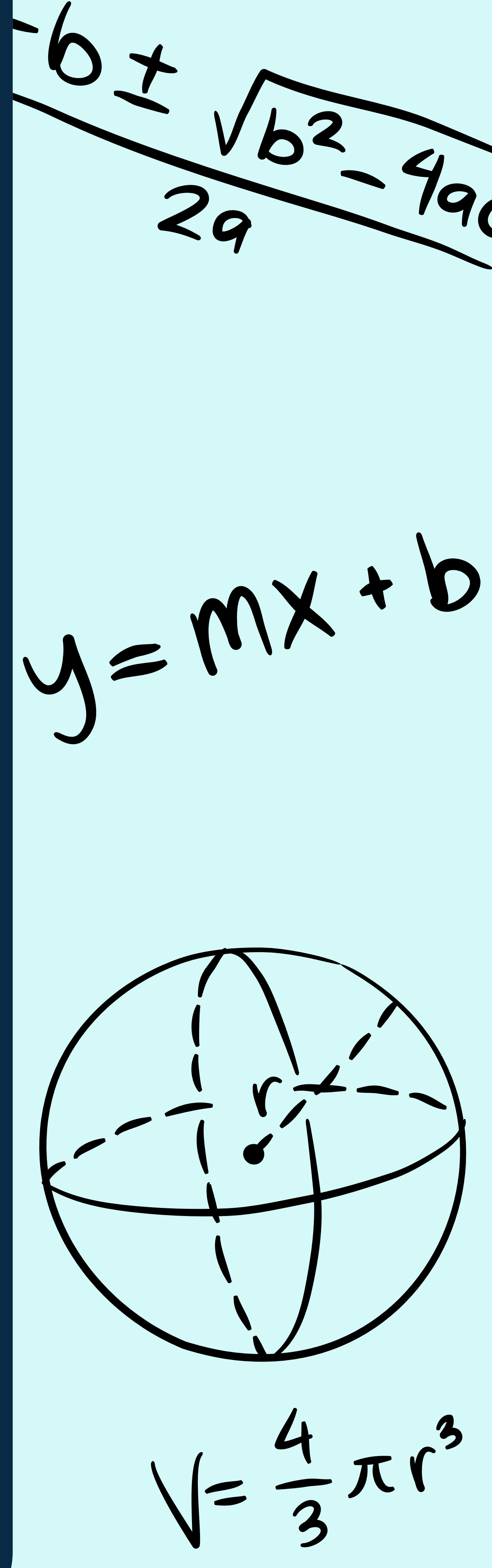
4. 推導結論：所有正整數都是「奇妙數字」

由於每個正整數都可以最終通過不斷應用函數 f 簡化到 1 或 2，而 1 和 2 已知是「奇妙數字」，因此根據這個推理，我們可以得出結論：

每個正整數都是「奇妙數字」。

5. 結論：2021^2021 是「奇妙數字」

由於每個正整數都是「奇妙數字」，我們可以得出結論，2021^2021 也是「奇妙數字」。 總結 這段推理利用了一系列變換和數學函數 $f(a) = \lfloor a/3 \rfloor$，展示了當一個數字是「奇妙數字」時，與之相關的其他數字也會是「奇妙數字」，並且通過對數字進行簡化，最終所有正整數都會變得「奇妙數字」，包括 2021^2021。



類題

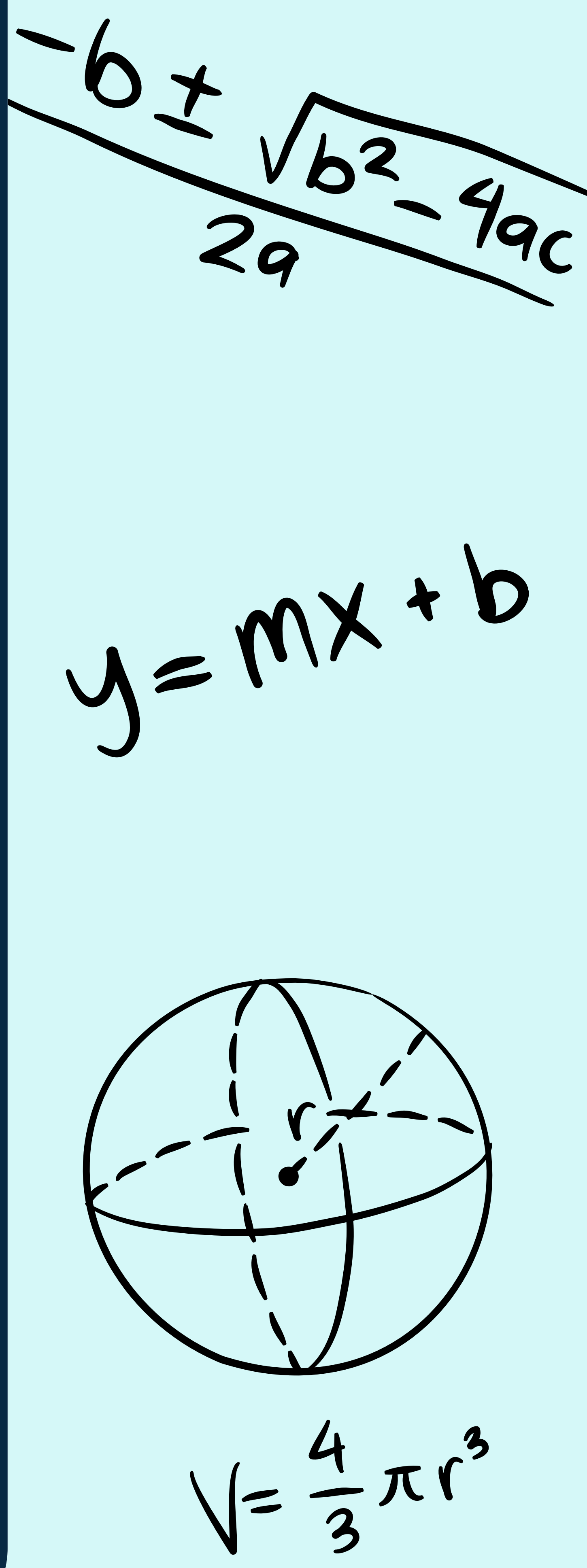
請問20241113是奇妙數字嗎?

ANSWER：

根據上一篇所得到的結論，我們知道所有≥ 3的正整數經過足夠次的應用，最終會到達 1 或 2，意旨所有≥ 3的正整數皆為奇妙數字，本題具體過程如下：

20241113 → 6747037 → 2249012 → 749670 → 249890 → 83296 → 27765 → 9255 → 3085 → 1028 → 342 → 114 → 38 → 12 → 4 → 1

所以20241113亦為奇妙數字。



謝謝大家