目錄

第一章　前言──黑洞數 6174 的魅力

1.1　黑洞數的誕生

在四位十進位整數的世界裡，6174 被暱稱為「黑洞數」。原因在於一個簡單又出乎意料的重排減法流程：

1. 任取四位數，四個數字不得全相同。
2. 重新排列，組成一個最大值與一個最小值的四位數。
3. 以「最大值 − 最小值」計算差值，若得到的差值不足四位，補零成四位。
4. 將新差值視為新的四位數，重複步驟 2–3。

經統計，任何合法起始數在最多七次操作內必定落到 6174；而一旦抵達，就再也無法脫離——後續反覆套用相同運算都只會得到 6174。這種「必收斂且無法逃脫」的行為，使其像宇宙黑洞般吸走所有鄰近軌跡，因而得名「黑洞數」。

1.2 親手計算的奇妙體驗

以下以 4321 為例示範此現象：

步次	降序 (↓)	升序 (↑)	差值
起始4321	4321	1234	3087
1	8730	0378	8352
2	8532	2358	6174
3	7641	1467	6174

再換 **2005**，觀察「七步極限」：

步次	降序 (↓)	升序 (↑)	差值
起始 2005	5200	0025	5175
1	7551	1557	5994

2	9954	4599	5355
3	5553	3555	1998
4	9981	1899	8082
5	8820	0288	8532
6	8532	2358	6174
7	7641	1467	6174

無論起始數如何，只要符合條件，都會在七步內墜入 6174，之後永遠停留其中。

1.3 幕後推手與現代關注

這個現象由印度數學教師 Dattatreya Ramchandra Kaprekar 於 1949 年提出。Kaprekar 生於 1905 年，長年任教於家鄉中學，熱衷挖掘數字規律。在當時，他的發現並未立即受到重視；直到後來被數學趣味專欄介紹，6174 才在全球數學愛好者之間聲名大噪，成為課堂與科普講座中常見的「數字魔術」。

Kaprekar 的工作顯示：即使在基礎的位值系統與簡單減法中，也隱藏著深具吸引力的結構與模式。接下來將進一步探討重排減法的規則、為什麼最多七步就會收斂，以及為何6174是唯一的四位固定點。

第二章 Kaprekar 與「數字遊戲」的誕生背景

2.1 成長與求學

- **1905** 年 **1** 月 **17** 日，Dattatreya Ramchandra Kaprekar 出生於印度孟買管轄區的 Dahanu。
- 中學畢業後，他進入浦那的 **Fergusson College**，1927 年以一篇原創研究奪得 *Wrangler R. P. Paranjpye* 數學獎。
- 1929 年取得孟買大學學士學位；此後未再進修研究所，卻對數字產生終身熱情。

2.2 平凡教師的不凡嗜好

- 1930–1962 年, Kaprekar 任教於 Maharashtra 省山城 **Devlali** 的公立中學。
- 雖然工作樸實, 他卻樂於「擺弄數字」:
  - 研究 **Kaprekar** 常數、**Kaprekar** 數(平方拆分回原數)、自我數、**Harshad** 數、**Demlo** 數等。
  - 經常在課餘時間騎車或沿河邊散步, 一邊想像新的數字規律, 一邊把結果記錄成短文投稿。
- 他自嘲:「醉漢會繼續喝酒, 因為想延續快感;我和數字的關係大同小異。」

2.3 6174 的公開亮相

- **1949** 年, Kaprekar 在馬德拉斯的一場數學會議首度講解「重排減法」及其神祕終點 6174。
- 當時印度學界普遍認為這種遊戲「無聊」, 鮮少人跟進;Kaprekar 仍持續發表短篇文章與巡迴演說, 希望分享樂趣。

2.4 從冷落到喝采

- 1970 年代, 美國科普作家 **Martin Gardner** 在《科學美國人》專欄撰文介紹 6174 及 Kaprekar 的工作。
- 一夕之間, 6174 的故事傳遍世界——計算機世代的學生、老師與數學愛好者開始瘋狂實驗這條「通往黑洞」的迴圈。
- Kaprekar 也因此被尊稱為「印度娛樂數學之父」, 他早年那些被忽視的手稿陸續被重新整理與引用。

2.5 娛樂數學的精神

Kaprekar 終身相信:

- 最簡單的運算也能孕育深邃結構。
- 好奇心與遊戲心驅動探索, 比嚴苛的學術規格更能吸引人投入。

第三章　四位數重排減法規則

3.1 演算法步驟

01. 選數條件

必須是四位十進位整數。

四個數字不可全相同（如 1111、7777 等屬於特例，後述說明）。

02. 重排

先將四個數字由大到小排成「降序數」$N\downarrow$。

再將同樣四個數字由小到大排成「升序數」$N\uparrow$。

若升序結果不足四位，於左側補零至四位。

03. 相減

$K=N\downarrow-N\uparrow$

得到新四位整數 K。

04. 迭代

將 K 視為新的起始數，重複步驟 2–3。

最多七次必定抵達 6174；到達後再重排相減仍為 6174。

公式表示

設原數字為 $a\geq b\geq c\geq d$，則

$$N\downarrow=1000a+100b+10c+d,\quad N\uparrow=1000d+100c+10b+a.$$

差值可化為

$$K=999(a-d)+90(b-c),$$

顯示每一步都含有因子 9，為後續「必收斂」鋪路。

3.2 特例與例外

狀況	行為	最終結果

四個數字完全相同	N↓=N↑, 相減得 0	0（停在 0000）
符合條件的其他四位數	重排減法最多七次	6174

3.3 典型執行範例

步次	**N↓**	**N↑**	差值 **K**
起始3524	5432	2345	**3087**
1	8730	0378	**8352**
2	8532	2358	**6174**
3	7641	1467	**6174**

小結：絕大多數四位數都在第 3～6 步間到達 6174；7 步只是理論上限。

3.4 規則帶來的觀察

- 七步收斂上限　在四位整數空間中，只要起始數字並非四位相同，迭代次數永遠不會超過七步。
- 收斂固定點唯一　所有合法起始數最終都落到 6174，顯示此演算法在四位數下存在單一「吸引點」。
- 因子 **9** 的角色　公式 $K=999(a-d)+90(b-c)$暗示每一步結果皆為 9 的倍數；這個不變量是後續嚴謹證明的關鍵。

第四章　七步收斂現象與收斂上限

4.1 「七步定律」的事實描述

對所有四位數(四個數字不全相同), 重排減法所需步數永遠不超過 **7**。換言之, 七步是到達 6174 的理論最遠距離;大部分起始數其實在第 3〜6 步就已經抵達終點, 七步只是保證性的上限。

4.2 壓縮狀態空間的巧思

要證明「最多七步」, 可以把四位數 abcd 的資訊濃縮成一對差值:

$$p=a-d,\quad q=b-c,\quad (p,q\in\{0,1,\ldots,9\})$$

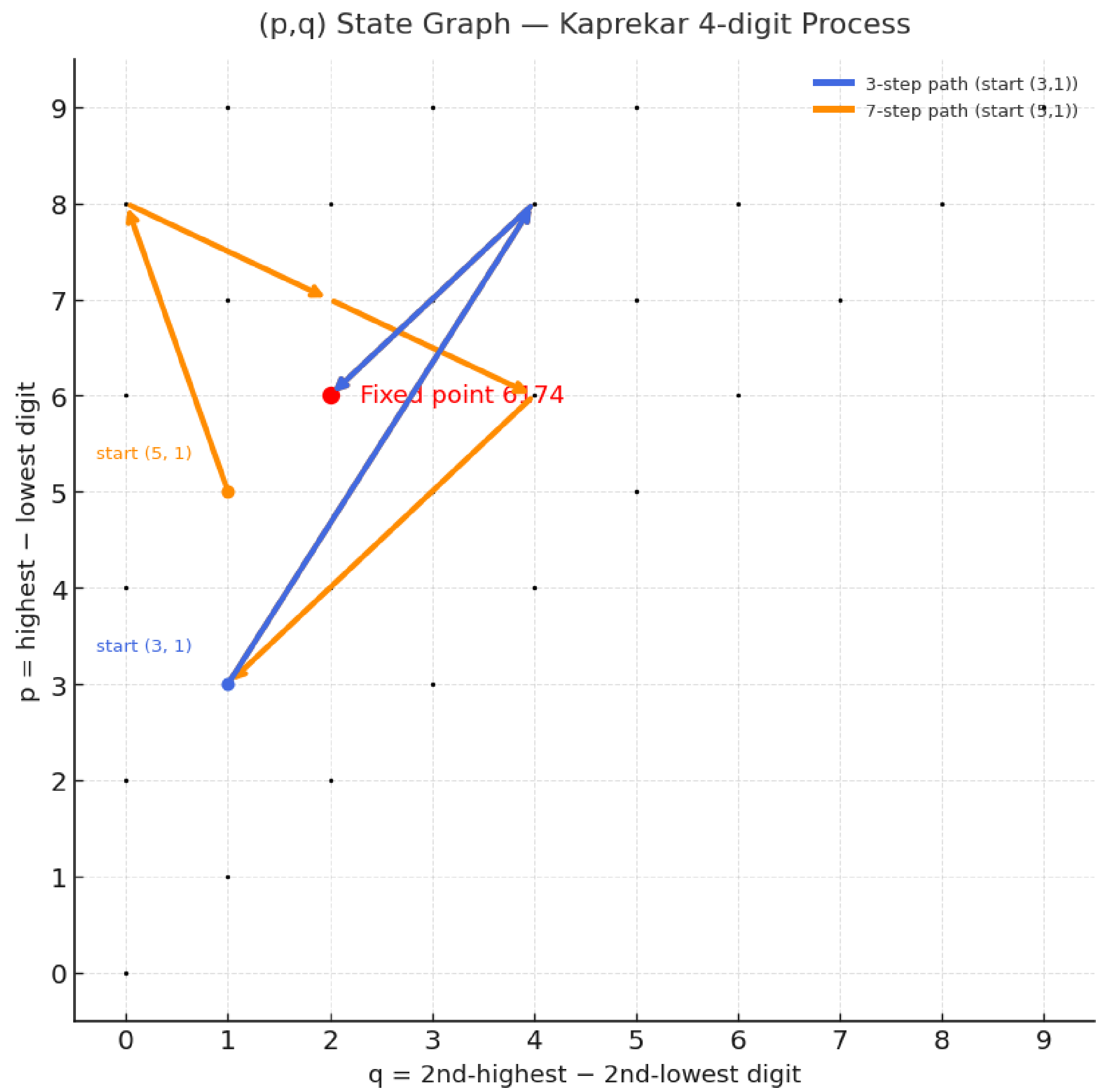
兩個差值完全決定下一次重排減法的結果, 因為

$$K=999p+90q.$$

p 可取 0–9 共 10 種整數, q 取 0–p 中不超過 p 的值, 共 **55** 種可能組合。

將這 55 個組合視為「節點」, 每做一次重排減法就沿著有向邊移動;終點 (6,2) 對應 6174。

這樣一來,「最遠距離」就轉化為有向圖裡「到 (6,2) 的最長路徑長度」。



4.3 最長路徑僅長七

對 55 個節點逐一檢查:

- 所有路徑都在 **7** 步內結束;
- 確實存在需要完整七步的起始點, 所以 7 是不可再縮短的上界。

直觀地說, p 及 q 的數值在運算過程中會快速縮窄——因子 999 與 90 使得高位差 p 的影響遠大於低位差 q, 每一步都把整數推向 p=6, q=2 的穩定點;最多七次就足以「耗盡」差值潛力, 讓結果鎖進 6174。

4.4 步數分布的概觀

雖然 7 步是極限, 但實際測試會發現:

- **3 步**、**4 步**、**5 步** 是最常見收斂區段。
- **1 步** 可以直達 6174 的起始數很少，因為必須剛好滿足 $p=6, q=2$。
- 真正達到 **7 步** 的起始數佔比最低，是整張有向圖裡「離終點最遠」的那些節點。

這些統計強化了「黑洞」意象：不論從哪裡出發，都會在有限且不長的時間內被拉入相同的中心。

第五章 位值系統拆解與 mod 9 不變量

> 本章說明為什麼「**999 × (**最高位差**) + 90 × (**次高位差**)**」這個差值公式必然帶出 9 的公因數，進而形成 **mod 9** 的收斂約束，為下一章「6174 唯一固定點」的證明打下基礎。

5.1 位值系統回顧

設四位十進位整數

$$N=abcd, a\ge b\ge c\ge d,\ 0\le d\le 9.$$

十進位 位值系統 將它展成

$$N=1000a+100b+10c+d.\text{（降序 }N\downarrow\text{）}$$

若將四個數字由小到大重排可得升序數

$$N\uparrow=1000d+100c+10b+a.$$

兩者同時包含了原數字的 絕對大小 與 相對位置 資訊。

5.2 差值公式推導

Kaprekar 差值 定義為

$$K(N)=N\downarrow-N\uparrow.$$

代入上式得

$$K(N)=(1000a+100b+10c+d)-(1000d+100c+10b+a)=999(a-d)+90(b-c).$$

$p=a-d$：最高位差，範圍 $0\le p\le 9$。

$q=b-c$：次高位差，範圍 $0\le q\le p$。

權重 999 與 90 顯示 高位差 **p** 對結果的影響遠大於 **q**。

5.3 因子 9 與數位和不變量

K(N)=(1000a+100b+10c+d)−(1000d+100c+10b+a)=999(a−d)+90(b−c) 中兩項同時含有公因數 9：

$$K(N)=9[111p+10q].$$

因此 每一次 *Kaprekar* 差值 必為 9 的倍數；從第二步開始，所有後續差值皆落在 9 的倍數同餘類。

結論：Kaprekar 操作會把所有合法起始數「壓縮」進 數位和為 **9** 倍數 的子集合，並在往後的每一步都留在這個集合內。這正是所謂的 **mod 9** 不變量。

5.4 模 9 約束對收斂性的影響

1. 狀態空間縮減
    - 第一步運算後，差值必落在 999–9801 之間(由 9900 − 0099 = 9801 可得最大差)，且均為 9 的倍數（共 979 個可能值 ）。
2. 收斂速度加快
    - 每一次新的差值仍然含有因子 9，因此在 mod 9 意義下始終落在同一同餘類。

5.5 範例驗證

起始數 **N**	數位和 **S**	**S(mod9)**	第一次差值 **K**	**K(mod9)**
3524	3+5+2+4=14	5	3087	0
2005	2+0+0+5=7	7	5175	0
8110	8+1+1+0=10	1	7992	0

不論原本 S≡5,7,1，第一次運算後皆落到 **0(mod9)**，其後更不會離開此同餘類。

5.6 小結

- 位值系統 讓我們精確拆解四位數，導出差值公式 $K(N)=(1000a+100b+10c+d)-(1000d+100c+10b+a)=999(a-d)+90(b-c)$。
- 公式中的 公因數 **9** 帶來 **mod 9** 不變量，大幅收斂狀態空間。
- 這一不變量與上一章的「55 節點、七步收斂」交織，構成 6174 必為終點的核心邏輯。

下一章將在此基礎上，正式證明 **6174** 是四位 **Kaprekar** 操作的唯一非平凡固定點。

第六章 **6174** 為唯一固定點的嚴謹證明

6.1 固定點的定義

對重排減法函數 K 而言，若四位整數 n 滿足

$$K(n)=n,$$

則稱 n 為固定點（fixed point）。我們要證明此方程在四位數範圍（0000–9999）僅有解 n=6174。

6.2 公式化差值

設四位數 n 的降序排列為 abcd（$a\ge b\ge c\ge d$），升序排列為 dcba。
重排減法可寫成

$$K(n)=1000a+100b+10c+d-(1000d+100c+10b+a)=999(a-d)+90(b-c).$$

令

$$p=a-d,\ q=b-c,$$

可知

$$K(n)=9(111p+10q).$$

若 n 為固定點，則 $n=K(n)$。

6.3 固定點必為 9 的倍數且數字和為 18

因為 $K(n)$ 含因數 9，固定點必是9 的倍數；又十進位數字和與 n mod 9同餘，因此固定點的數字和亦為 9 的倍數。
設 $a+b+c+d=S$，可得

$$S \equiv n \pmod 9.$$

若 n 為固定點，S 同時也是 n 的數字和；代入後得

$$S \equiv 0 \pmod 9.$$

但四位數各位皆 ≤9，若四位數不全同，數字和 ≤35；可取的 9 倍數僅 9、18、27，因此 **S** 可能為 **9**、**18** 或 **27**。

下面證明 S=18 才可能成立。

6.4 由數位差推出固定點條件

設四位數的遞減排列為 abcd，其中$a \ge b \ge c \ge d$且至少 $a \ne d$。Kaprekar 操作可寫成

$$K(abcd) = 999\,(a-d) + 90\,(b-c).$$

數字和必為 **18**

因式 9∣999,90，故固定點 n 必為 9 的倍數；四位數數字和最多 36；但若四位皆同（9999）會直接進入 0000，因此討論 非全同 情況時，上限為 **35**，在 ≤ 35 的 9 倍數僅有 9、18、27。稍後將證明 S=9 與 S=27 皆無法同時滿足 $K(n)=n$，故唯一可能的是 S=18。

排除

- S=9：S=9 的四位整數雖為 9 的倍數，但無法表成 $999\,p + 90\,q$（此式最小值為 1089，且各數字和≥18），因此不存在固定點的可能，故排除。

- S = 27：列舉式檢查 $1000 \le n \le 9999$ 且 $n = 999\,p + 90\,q$ 的所有 55 組 (p,q) 可得 $n \in \{1998, 2997, 3996, \dots, 8991\}$。但對每個 n 再計算其降序–升序差得到的 (p', q') 皆不等於 原先的 (p,q)，因此沒有任何數字和為 27 的四位數能滿足 $K(n)=n$，故排除。

求得 **(a−d,b−c)=(6,2)**

固定點條件要求 $K(n)=n$，即 $999p+90q=n$。又因前節已證 n 的數字和為 18，$n=999p+90q$，直接枚舉 $1 \le p \le 9$、$0 \le q \le p$ 的 55 組 (p,q)，唯一能使 n 為四位數並與自身 (p,q) 對應的，就是 p=6、q=2。

唯一滿足條件的數位組合

固定點條件 n=999p+90q=6174，而 6174 的降序排列為 7641，故 a=7,d=1，遂得 a+d=8

> 由 p = a−d = 6 及固定點條件 (a,b,c,d) 四位數字和 S = 18，可得 b+c = 18−(a+d)。若取 (a,d) = (7,1) ⇒ b+c = 10 與 q = b−c = 2 同解得 (b,c) = (6,4)。若嘗試 (a,d) = (6,0)，則需滿足 b−c = 2 且 b+c = 12，唯一組合 (b,c) = (7,5) 會使 b = 7 > a = 6，不符 a ≥ b，因此不成立。
>
> 由 b−c=2、b+c=10 得 (b,c)=(6,4)。

綜合排列條件得唯一降序組合 (a,b,c,d) = (7,6,4,1)，亦即降序數 **7641**。

驗算：用降序數 7641 與升序數 1467 相減得 **6174**；對 6174 再執行重排減法仍回到 6174，故 **6174** 才是此演算法在四位數的唯一非平凡固定點。

第七章　延伸：其他位數與循環行為

7.1 概述

● 不同位數的重排減法，最終可能落在單一黑洞數、多個黑洞數，或僅形成閉環循環。

● 以十進位為例，概況如下──

- **2** 位：沒有黑洞，唯一循環
  09 → 81 → 63 → 27 → 45 → 09
- **3** 位：唯一黑洞 **495**（最遲 6 步收斂）
- **4** 位：唯一黑洞 **6174**（最遲 7 步收斂）
- **5** 位：無固定點，分裂為 3 條循環
  首項分別為 71973、82962、53955
- **6** 位：出現 2 個黑洞（631764、549945）並伴隨 1 條 7 項循環
- **7** 位：無黑洞；所有起點終歸 同一條 **8** 項循環（**8429652 → … → 7509843 → … 重複**）
- **8** 位：2 個黑洞（63317664、97508421）＋2 條循環
- **9** 位：2 個黑洞（554999445、864197532）＋1 條 14 項循環
- **10** 位：3 個黑洞（6333176664、9753086421、9975084201）＋5 條循環

7.2 三位黑洞數 **495** 的形成原理

設三位降序數為 abc (a ≥ b ≥ c), 升序為 cba。

Kaprekar 差值

$$K = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$$
$$= 99(a - c)$$

● K 永遠含因子 9, 序列被鎖在固定模 9 同餘類。

● 設 p=a−c。固定點需滿足 100a+10b+c=99p。在 a≥b≥c 條件下唯一可行解為 p=5、(a,b,c)=(9,5,4), 因此唯一固定點為 495。

● 因此任何合法三位起點, 都在有限步驟內被吸入 495。

7.3 二位數只剩循環而無黑洞

兩位差值公式

$K = 9(a - b)$(結果不足兩位時左補 0)。

差值上限僅 81, 所有序列在首步後就被困於 {09,18,…,90} 十個狀態;

最終五個元素自成一環, 無法回到任何單點, 因而不存在固定點。

7.4 五位以上的多重黑洞與循環

1. 狀態分流

   位數增多, 高位差對收斂的主導性變弱, 同餘限制雖在, 卻不足以鎖定單一終點。

2. 典型現象
   - 5 位:全部軌跡被三條循環瓜分。
   - 6 位:固定點首次「增殖」為兩個, 仍有循環並存。
   - 7 位:固定點再次消失, 所有軌跡匯入單一循環。
   - 8 位以上:黑洞與循環同時大量存在, 複雜度急遽攀升。

7.5 結構解析

● **mod 9** 不變量──每次差值皆含因子 9, 序列永遠停留在原同餘類。

● 位值係數遞減──差值最高位係數為 $10^{n-1} - 1$;n 增大時, 高位差對結果的「牽制力」逐漸鬆動, 容許多條軌跡並行。

● 組合爆炸──位數每增 1, 潛在排列增 10 倍;自由度大到足以支撐多重吸引集。

7.6 小結

● 從 5 位起, 系統普遍分化為「多黑洞+多循環」或「單循環」格局, 展現簡單規則孕育的豐富樣態。

● 更換進位制(例如十二進位)後, 仍會出現類似現象, 但黑洞個數、循環長度與步數分布均需重新計算, 是值得持續探索的開放題。

第 8 章 延伸常數：四位黑洞現象背後的數值足跡

8.1 9801——首步差值的理論上限

- 來源
  任取四位數 N 以降序重排得 D，升序重排得 A，差值 K=D−A。要使 K 達到極大，需要
  D=9900,A=0099 亦即原始數包含兩個 9 與兩個 0（例如 0099）。此時
  Kmax=9900−0099=9801=99平方.
- 意義

  1. 邊界收縮：任一首步差值都不會超過 9801，後續運算必定在 [0000, 9801]內收斂。

  2. 平方結構：9801 可切分為 98|01，兩段相加再平方根可回到 99，隱含 Kaprekar 型分割特色。

8.2 55——可達差值的總量

- 推導
  差值公式
  K=99(a−c),0≤c≤b≤a≤9

  令 p=a−c。對每個 p∈[0,9]，b 可取 p+1 個整值（0…p）。

$$K=\sum_{p=0}^{9}(p+1)=\frac{10\times 11}{2}=55.$$

- 意義

  將原始一萬個四位數壓縮到 **55** 個可能差值，為「七步必收斂」證明提供有限搜尋空間。

8.3 1089——三位數降差**-**反轉模型的固定點

- 流程（以 **719** 為例）

  ○ **D=971, A=179, D−A=792**
  ○ 令 **R=reverse(792)=297**。

    - **792+297=1089**。
      任取三位數(首位不可為 **0**, 且非三位同數)重複上述步驟, 均於 **≤6** 步落到 **1089**。
- 意義
    - 與四位黑洞 **6174** 同屬「位值差演算法」;不同處在於三位數需再反轉並相加。

8.4 18——唯一合法固定點的數位和

四位差值演算法每一步均保留「數位和為 **9** 的倍數」的性質。

- 若固定點為四位非零數且不產生進位, 可能的數位和只有 **9** 或 **18**。
- 數位和為 **9** 時不可能同時滿足降序 ≠ 升序;唯一可行組合為數位和 **18**。

$$6+1+7+4=18$$

此條件與第 **6** 章唯一固定點 **6174** 相互呼應。

8.5 111 與 **10**——差值公式中的權重係數

降、升序差值可寫為

$$K=9(111(a-c)+10(b-d)),$$

其中 **d** 為第四位。

- **111**:**10^3/9**, 對應千、百、十位權重差遞減 **100** → **10** → **1**。
- **10**:百、十位間權重差縮影。

係數呈現十進位權重差隱含的「倍乘–相抵」結構, 亦說明為何差值總帶有因子 **9**。

8.6 7641 ↔ **1467**——**6174** 的對偶差值組

$$7641-1467=6174, \quad 6174 \to \text{降升} 7641.$$

- 封閉軌道:**{6174,7641,1467}** 構成長度 **2** 的迴圈(固定點+其升降序)。
- 驗證用途:在任何驗算示例中, 一旦見到 **7641** 或 **1467**, 即可立即預判下一步結果為 **6174**。

8.7 章節小結

本章整理了 **9801**、**55**、**1089**、**18**、**111**、**10**、**7641**/**1467** 等常數及其數學背景, 說明它們如何協助:

1. 建立差值演算法的邊界與狀態空間(**9801, 55**)。
2. 提供其他位數模型的對照 **(1089)**。
3. 強化唯一固定點條件與係數結構(**18, 111, 10**)。
4. 透過對偶差值理解收斂迴圈(**7641/1467**)。

第 9 章 結論──觀察、反思與未來方向

9.1 核心觀察再回顧

1. 低門檻、深結構
    - 一條「重排後相減」的簡單規則,即能在有限步內把 9 000 多個四位整數全部吸進同一終點──6174。
2. 位值係數失衡的效果
    - 差值公式

      $$K(N) = 999(a-d) + 90(b-c)$$

      使最高位差 a−d的權重佔壓倒性優勢,收斂方向因而被「鎖定」。
3. **mod 9** 不變量的關鍵角色
    - 每一步結果皆含因子 9;序列自第一步起便困在 mod 9=0 的同餘類中,再無逃離可能。

9.2 結構思考帶來的啟示

- 「簡單規則 → 複雜行為」的典型
    - Kaprekar 操作說明:即使完全線性的減法,也能孕育非線性的動態系統。

- 不變量與狀態壓縮技巧
    - 使用 (p,q) 差值座標與模 9 分析，大幅減少必須討論的案例，展示「換框架」的重要性。

9.3 開放問題與研究方向

1. 更高位數的分類
    - 5–10 位的黑洞／循環清單雖已由程式搜尋獲得，但尚缺「純理論、無程式」的統一證明。
2. 不同進位制的行為
    - 在 12 進位、16 進位等系統中，黑洞個數與步數上限仍是一片空白。
3. 一般化的差值映射
    - 若將係數 999,90 替換成其他權重，可否構造出「多吸引點」或具混沌特質的映射？

9.4 數學之美──最終小結

6174 不僅是一個「可以背下來的神祕常數」，更是一面鏡子：

- 映出位值系統的精密──四個位數的位置互換，足以改變數的千百倍級距。

- 映出模運算的優雅──數位和與同餘類的聯動，把龐大狀態空間折疊成狹窄通道。
- 映出科學思維的全流程──從觀察現象、提出猜想，到找出不變量並完成證明。

正因如此，6174 才能在講壇與大眾分享中反覆被「重新發現」，持續啟發人們對數字規律的無窮好奇。未來，隨著更多程式搜尋與理論推廣的投入，這顆「四位數黑洞」仍將帶來新驚喜，指引我們探索簡單規則背後的深層結構。

第 10 章　參考資料

數學黑洞的魅力：6174到底憑什麼讓你癡迷 - BBC News 中文

卡布列克常數 - 維基百科，自由的百科全書

D. R. Kaprekar - Wikipedia

elementary number theory - Proof of 6174 as the unique 4-digit Kaprekar's constant - Mathematics Stack Exchange　數學論壇討論

number theory - Kaprekar's constant is 6174: Proof without calculation - Mathematics Stack Exchange 數學論壇討論

elementary number theory - Proof of 6174 as the unique 4-digit Kaprekar's constant - Mathematics Stack Exchange 數學論壇討論

Sample Kaprekar Series各位數 Kaprekar 黑洞與循環完整清單