數學解題方法

由第四組
顏融勝
黃民智
葉家禎
鄭同恩
徐梓源

目錄

Demlo 數

卡布列克數

卡布列克常數

目錄：卡布列克常數

Demlo 數的定義

Demlo 數是指一種特殊的回文數？通常以連續
數字 「123..n..321」 的對稱排列出現

Demlo可以透過以下方式產生：
從1 到n 的1構成一個數 , 再平方

例如：
1 ˆ 2=1
11 ˆ 2 = 121
111 ˆ 2 = 12321
1111 ˆ 2= 1234321

卡布列克數(Kaprekar Number)

若一個數字在X進位的平方可以拆成兩段，使其和等於原數，
則稱為該進位的卡布列克數。

例如 : 45，45 ^ 2 = 2025 -> 20 +25= 45

常見的卡布列克數 （十進位）：
9, 45, 55, 99, 297, 703, 999, 2223, 2728,

自我數(Self Numbers)
又稱生成元數 (ColombianNumbers)

若一個正整數n不是任何其他數字m與其各位數字總和的結果，則稱n 為自我數。

例如：
21 = 15+1+5-> 21 不是自我數
20 沒有任何數字m與其各位數字總和 =20 ，所以20 是自我數

卡布列克常數
黑洞數

1.黑洞數 6174 的魅力

1.1　黑洞數的誕生

在四位十進位整數的世界裡，6174 被暱稱為「黑洞數」。原因在於一個簡單又出乎意料的重排減法流程：

任取四位數，四個數字不得全相同。

重新排列，組成一個最大值與一個最小值的四位數。

以「最大值 − 最小值」計算差值，若得到的差值不足四位，補零成四位。

將新差值視為新的四位數，重複步驟 2–3。

經統計，任何合法起始數在最多七次操作內必定落到 6174；而一旦抵達，就再也無法脫離——後續反覆套用相同運算都只會得到 6174。這種「必收斂且無法逃脫」的行為，使其像宇宙黑洞般吸走所有鄰近軌跡，因而得名「黑洞數」。

1.2　親手計算的奇妙體驗

步次	降序	升序	差值
起始	4321	1234	3087
1	8730	0378	8352
2	8532	2358	6174
3	7641	1467	6174

1.3　幕後推手與現代關注

這個現象由印度數學教師 Dattatreya Ramchandra Kaprekar 於 1949 年提出。Kaprekar 生於 1905 年，長年任教於家鄉中學，熱衷挖掘數字規律。在當時，他的發現並未立即受到重視；直到後來被數學趣味專欄介紹，6174 才在全球數學愛好者之間聲名大噪，成為課堂與科普講座中常見的「數字魔術」。

Kaprekar 的工作顯示：即使在基礎的位值系統與簡單減法中，也隱藏著深具吸引力的結構與模式。接下來將進一步探討重排減法的規則、為什麼最多七步就會收斂，以及為何6174是唯一的四位固定點。

Kaprekar 與「數字遊戲」的誕生背景

2.1　成長與求學

1905 年 1 月 17 日，Dattatreya Ramchandra Kaprekar 出生於印度孟買管轄區的 Dahanu。

中學畢業後，他進入浦那的 Fergusson College，1927 年以一篇原創研究奪得 Wrangler R. P. Paranjpye 數學獎。

1929 年取得孟買大學學士學位；此後未再進修研究所，卻對數字產生終身熱情。

2.2　平凡教師的不凡嗜好

1930–1962 年，Kaprekar 任教於 Maharashtra 省山城 Devlali 的公立中學。

雖然工作樸實，他卻樂於「擺弄數字」：

研究 Kaprekar 常數、Kaprekar 數（平方拆分回原數）、自我數、Harshad 數、Demlo 數等。

經常在課餘時間騎車或沿河邊散步，一邊想像新的數字規律，一邊把結果記錄成短文投稿。

他自嘲：「醉漢會繼續喝酒，因為想延續快感；我和數字的關係大同小異。」

2.3　6174 與從冷落到喝采

1949 年，Kaprekar 在馬德拉斯的一場數學會議首度講解「重排減法」及其神祕終點 6174。

當時印度學界普遍認為這種遊戲「無聊」，鮮少人跟進；Kaprekar 仍持續發表短篇文章與巡迴演說，希望分享樂趣。

1970 年代，美國科普作家 Martin Gardner 在《科學美國人》專欄撰文介紹 6174 及 Kaprekar 的工作。

一夕之間，6174 的故事傳遍世界——計算機世代的學生、老師與數學愛好者開始瘋狂實驗這條「通往黑洞」的迴圈。

Kaprekar 也因此被尊稱為「印度娛樂數學之父」，他早年那些被忽視的手稿陸續被重新整理與引用。

2.4 娛樂數學的精神

Kaprekar 終身相信：
最簡單的運算也能孕育深邃結構。

好奇心與遊戲心驅動探索，比嚴苛的學術規格更能吸引人投入

第三章　四位數重排減法規則

1.選數條件

必須是四位十進位整數，
四個數字不可全相同
(如 1111、7777 等屬於特例，後述說明)。

2.重排

先將四個數字由大到小排成「降序數」N↓。
再將同樣四個數字由小到大排成「升序數」N↑。
若升序結果不足四位，於左側補零至四位。

3.相減

K=N↓−N↑
得到新四位整數 K。

4.迭代

將 K 視為新的起始數，重複步驟 2–3。
最多七次必定抵達 6174；到達後再重排相減仍為 6174。

公式表示

設原數字為 $a \geq b \geq c \geq d$，則

$N\downarrow = 1000a+100b+10c+d$, $N\uparrow = 1000d+100c+10b+a$.

差值可化為

$K = 999(a-d)+90(b-c)$,

顯示每一步都含有因子 9，為後續「必收斂」鋪路。

3.2 特例與例外

狀況	狀況行為	最終結果
四個數字完全相同	N↓=N↑, 相減得 0	0（停在 0000）
符合其他條件的四位數	重拍最多七次	6174

3.3　典型執行範例

小結：絕大多數四位數都在第 3～6 步間到達 6174；7 步只是理論上限。

3.4 規則帶來的觀察

七步收斂上限 在四位整數空間中，只要起始數字並非四位相同，迭代次數永遠不會超過七步。

收斂固定點唯一 所有合法起始數最終都落到 6174，顯示此演算法在四位數下存在單一「吸引點」。

因子 9 的角色 公式 K=999(a−d)+90(b−c)暗示每一步結果皆為 9 的倍數；這個不變量是後續嚴謹證明的關鍵。

4.　七步收斂現象與收斂上限

4.1「七步定律」的事實描述

對所有四位數（四個數字不全相同），重排減法所需步數永遠不超過 7。換言之，七步是到達 6174 的理論最遠距離；大部分起始數其實在第 3～6 步就已經抵達終點，七步只是保證性的上限。

4.2 壓縮狀態空間的巧思

要證明「最多七步」，可以把四位數 abcd 的資訊濃縮成一對差值：

$p=a-d$，$q=b-c$，$(p,q\in\{0,1,\cdots,9\})$

兩個差值完全決定下一次重排減法的結果，因為

$$K=999p+90q.$$

p 可取 0–9 共 10 種整數, q 取 0–p 中不超過 p 的值，共 55 種可能組合。

將這 55 個組合視為「節點」，每做一次重排減法就沿著有向邊移動；終點 (6,2) 對應 6174。

這樣一來，「最遠距離」就轉化為有向圖裡「到 (6,2) 的最長路徑長度」。

4.3 最長路徑僅長七

對 55 個節點逐一檢查：

所有路徑都在 7 步內結束；
確實存在需要完整七步的起始點，所以 7 是不可再縮短的上界。
直觀地說，p 及 q 的數值在運算過程中會快速縮窄——因子 999 與 90 使得高位差 p 的影響遠大於低位差 q，每一步都把整數推向 p=6, q=2 的穩定點；最多七次就足以「耗盡」差值潛力，讓結果鎖進 6174。

4.4 步數分布的概觀

雖然 7 步是極限，但實際測試會發現：

3 步、4 步、5 步 是最常見收斂區段。
1 步 可以直達 6174 的起始數很少，因為必須剛好滿足 p=6, q=2。
真正達到 7 步 的起始數佔比最低，是整張有向圖裡「離終點最遠」的那些節點。
這些統計強化了「黑洞」意象：不論從哪裡出發，都會在有限且不長的時間內被拉入相同的中心。

5.　位值系統拆解與 mod 9 不變量

5.1 位值系統回顧

設四位十進位整數

$N=abcd, a\geq b\geq c\geq d,\ 0\leq d\leq 9.$

十進位 位值系統 將它展成

$N=1000a+100b+10c+d.$（降序 $N\downarrow$）

若將四個數字由小到大重排可得升序數

$N\uparrow=1000d+100c+10b+a.$

兩者同時包含了原數字的 絕對大小 與 相對位置 資訊。

5.2 差值公式推導

Kaprekar 差值 定義為

$K(N)=N\downarrow-N\uparrow$.

代入上式得

$K(N)=(1000a+100b+10c+d)-(1000d+100c+10b+a)=999(a-d)+90(b-c)$.

$p=a-d$：最高位差，範圍 $0\leq p\leq 9$。

$q=b-c$：次高位差，範圍 $0\leq q\leq p$。

權重 999 與 90 顯示 高位差 p 對結果的影響遠大於 q。

5.3 因子 9 與數位和不變量

$$K(N)=(1000a+100b+10c+d)-(1000d+100c+10b+a)=999(a-d)+90(b-c)$$

中兩項同時含有公因數 9：

$$K(N)=9[111p+10q].$$

因此，每一次 Kaprekar 差值 必為 9 的倍數；
從第二步開始，所有後續差值皆落在 9 的倍數同餘類。

結論： Kaprekar 操作會把所有合法起始數「壓縮」進 數位和為 9 倍數 的子集合，並在往後的每一步都留在這個集合內。這正是所謂的 mod 9 不變量。

5.4 模 9 約束對收斂性的影響

狀態空間縮減

第一步運算後，差值必落在 999–9801 之間(由 9900 − 0099 = 9801 可得最大差)，且均為 9 的倍數（共 979 個可能值）。

收斂速度加快

每一次新的差值仍然含有因子 9，因此在 mod 9 意義下始終落在同一同餘類。

5.5 範例驗證

不論原本 $S \equiv 5,7,1$，第一次運算後皆落到 $0 \pmod{9}$，其後更不會離開此同餘類。

5.6 小結

位值系統讓我們精確拆解四位數，導出差值公式 ：
$K(N)=(1000a+100b+10c+d)-(1000d+100c+10b+a)=999(a-d)+90(b-c)$。
公式中的公因數 9 帶來 mod 9 不變量，大幅收斂狀態空間。

這一不變量與上一章的「55 節點、七步收斂」交織，構成 6174 必為終點的核心邏輯。
下一章將在此基礎上，正式證明 6174 是四位 Kaprekar 操作的唯一非平凡固定點。

第六章　6174 為唯一固定點的嚴謹證明

6.1 固定點的定義

對重排減法函數 K 而言，若四位整數 n 滿足
K(n)=n,

則稱 n 為固定點（fixed point）。
我們要證明此方程在四位數範圍（0000–9999）僅有解 n=6174。

6.2 公式化差值

設四位數 n 的降序排列為 abcd（$a \geq b \geq c \geq d$），
升序排列為 dcba。重排減法可寫成

$$K(n)=1000a+100b+10c+d-(1000d+100c+10b+a)=999(a-d)+90(b-c).$$

令 $p=a-d,\ q=b-c$,

可知

$$K(n)=9(111p+10q).$$

若 n 為固定點，則 $n=K(n)$。

6.3 固定點必為 9 的倍數且數字和為 18

因為 K(n) 含因數 9，固定點必是9 的倍數；

又十進位數字和與 n mod 9同餘，因此固定點的數字和亦為 9 的倍數

設 a+b+c+d=S，可得

$S \equiv n \pmod 9$.

若 n 為固定點，S 同時也是 n 的數字和；代入後得

$S \equiv 0 \pmod 9$.

但四位數各位皆 ≤9，若四位數不全同，數字和 ≤35；

可取的 9 倍數僅 9、18、27，因此 S 可能為 9、18 或 27。

6.4 由數位差推出固定點條件

設四位數的遞減排列為 abcd，其中$a\geq b\geq c\geq d$且至少 $a\neq d$。

Kaprekar 操作可寫成

$$K(abcd) = 999(a-d) + 90(b-c).$$

數字和必為 18

因式 9 | 999,90，故固定點 n 必為 9 的倍數；四位數數字和最多 36；但若四位皆同（9999）會直接進入 0000，因此討論 非全同 情況時，上限為 35，在 ≤ 35 的 9 倍數僅有 9、18、27。稍後將證明 S=9 與 S=27 皆無法同時滿足 K(n)=n，故唯一可能的是 S=18。

排除

S=9：S=9 的四位整數雖為 9 的倍數，但無法表成 999 p + 90 q（此式最小值為 1089，且各數字和≥18），因此不存在固定點的可能，故排除。

S = 27：列舉式檢查 1000 ≤ n ≤ 9999 且 n = 999 p + 90 q 的所有 55 組 (p,q) 可得 n∈{1998, 2997, 3996, ⋯ , 8991}。但對每個 n 再計算其降序–升序差得到的 (p′, q′) 皆不等於 原先的 (p,q)，因此沒有任何數字和為 27 的四位數能滿足 K(n)=n，故排除。

求得 $(a-d,b-c)=(6,2)$

固定點條件要求 $K(n)=n$，即 $999p+90q=n$。又因前節已證 n 的數字和為 18，

$n=999p+90q$，直接枚舉 $1 \leq p \leq 9$、$0 \leq q \leq p$ 的 55 組 (p,q)，

唯一能使 n 為四位數並與自身 (p,q) 對應的，就是 $p=6$、$q=2$。

唯一滿足條件的數位組合

固定點條件 $n=999p+90q=6174$，而 6174 的降序排列為 7641，

故 $a=7,d=1$，遂得 $a+d=8$

由 $p = a-d = 6$ 及固定點條件 (a,b,c,d) 四位數字和 $S = 18$，可得 $b+c = 18-(a+d)$。

若取 $(a,d) = (7,1) \Rightarrow b+c = 10$ 與 $q = b-c = 2$ 同解得 $(b,c) = (6,4)$。

若嘗試 $(a,d) = (6,0)$，則需滿足 $b-c = 2$ 且 $b+c = 12$，

唯一組合 $(b,c) = (7,5)$ 會使 $b = 7 > a = 6$，不符 $a \geq b$，因此不成立。

由 $b-c=2$、$b+c=10$ 得 $(b,c)=(6,4)$。

綜合排列條件得唯一降序組合 $(a,b,c,d) = (7,6,4,1)$，亦即降序數 7641。

驗算：用降序數 7641 與升序數 1467 相減得 6174；
對 6174 再執行重排減法仍回到 6174，
故 6174 才是此演算法在四位數的唯一非平凡固定點。

第七章　延伸：其他位數與循環行為

7.1 概述

不同位數的重排減法，最終可能落在單一黑洞數、多個黑洞數，或僅形成閉環循環。
以十進位為例，概況如下

2 位：沒有黑洞，唯一循環 09 → 81 → 63 → 27 → 45 → 09

3 位：唯一黑洞 495（最遲 6 步收斂）

4 位：唯一黑洞 6174（最遲 7 步收斂）

5 位：無固定點，分裂為 3 條循環，首項分別為 71973、82962、53955

6 位：出現 2 個黑洞（631764、549945）並伴隨 1 條 7 項循環

7 位：無黑洞；所有起點終歸 同一條 8 項循環（8429652 → ⋯ → 7509843 → ⋯ 重複）

8 位：2 個黑洞（63317664、97508421）＋2 條循環

9 位：2 個黑洞（554999445、864197532）＋1 條 14 項循環

10 位：3 個黑洞（6333176664、9753086421、9975084201）＋5 條循環

7.2 三位黑洞數 495 的形成原理

設三位降序數為 abc ($a \geq b \geq c$)，升序為 cba。

Kaprekar 差值

$$K = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$$
$$= 99(a - c) + 9b$$

K 永遠含因子 9，序列被鎖在固定模 9 同餘類。
令 $a-c = p$，$b = q$，可得固定點方程
$100a + 10b + c = 99p + 9q$。
列舉有限整數組合僅得 $(p,q) = (4,5)$，即 495。
因此任何合法三位起點，都在有限步驟內被吸入 495。

7.3 二位數只剩循環而無黑洞

兩位差值公式

$K = 9(a - b)$（結果不足兩位時左補 0）。

差值上限僅 81，所有序列在首步後就被困於 {09,18,⋯,90} 十個狀態；

最終五個元素自成一環，無法回到任何單點，因而不存在固定點。

7.4 五位以上的多重黑洞與循環

狀態分流

位數增多，高位差對收斂的主導性變弱，同餘限制雖在，卻不足以鎖定單一終點。

典型現象

5 位：全部軌跡被三條循環瓜分。

6 位：固定點首次「增殖」為兩個，仍有循環並存。

7 位：固定點再次消失，所有軌跡匯入單一循環。

8 位以上：黑洞與循環同時大量存在，複雜度急遽攀升。

7.5 結構解析

mod 9 不變量

每次差值皆含因子 9，序列永遠停留在原同餘類。

位值係數遞減

差值最高位係數為 ；

n 增大時，高位差對結果的「牽制力」逐漸鬆動，容許多條軌跡並行。

組合爆炸

位數每增 1，潛在排列增 10 倍；自由度大到足以支撐多重吸引集

7.6 小結

從 5 位起，系統普遍分化為「多黑洞＋多循環」或「單循環」格局，
展現簡單規則孕育的豐富樣態。
更換進位制（例如十二進位）後，仍會出現類似現象，
但黑洞個數、循環長度與步數分布均需重新計算，是值得持續探索的開放題

第 8 章
延伸常數：四位黑洞現象背後的數值足跡

8.1 9801—首步差值的理論上限

來源

任取四位數 N 以降序重排得 D，升序重排得 A，差值 K=D−A。要使 K 達到極大，需要 D=9900,A=0099 亦即原始數包含兩個 9 與兩個 0（例如 0099）。此時 Kmax=9900−0099=9801=99平方.

意義

a. 邊界收縮：任一首步差值都不會超過 9801，後續運算必定在 [0000, 9801]內收斂。

b.

c. 平方結構：9801 可切分為 98|01，兩段相加再平方根可回到 99，隱含 Kaprekar 型分割特色。

8.2　55—可達差值的總量

推導

差值公式

$K=99(a-c), 0 \le c \le b \le a \le 9$

令 $p=a-c$。對每個 $p \in [0,9]$，b 可取 $p+1$ 個整值（$0 \cdots p$）。

意義

將原始一萬個四位數壓縮到 55 個可能差值，為「七步必收斂」證明提供有限搜尋空間。

8.3 1089—三位數降差-反轉模型的固定點

流程（以 719 為例）

D=971, A=179, D−A=792

令 R=reverse(792)=297。

792+297=1089。

任取三位數（首位不可為 0，且非三位同數）重複上述步驟，均於 ≤6 步落到 1089。

意義

與四位黑洞 6174 同屬「位值差演算法」；不同處在於三位數需再反轉並相加。

8.4 18——唯一合法固定點的數位和

四位差值演算法每一步均保留「數位和為 9 的倍數」的性質。
若固定點為四位非零數且不產生進位，可能的數位和只有 9 或 18。
數位和為 9 時不可能同時滿足降序 ≠ 升序；唯一可行組合為數位和 18。
$6+1+7+4=18$
此條件與第 6 章唯一固定點 6174 相互呼應。

8.5 111 與 10—差值公式中的權重係數

降、升序差值可寫為

K=9(111(a−c)+10(b−d)),

其中 d 為第四位。

111：10^3/9，對應千、百、十位權重差遞減 100 → 10 → 1。

10：百、十位間權重差縮影。

係數呈現十進位權重差隱含的「倍乘–相抵」結構，亦說明為何差值總帶有因子 9。

8.6 7641 ↔ 1467—6174 的對偶差值組

7641−1467=6174,　　6174→降升7641.

- 封閉軌道：{6174,7641,1467} 構成長度 2 的迴圈（固定點 + 其升降序）。
- 驗證用途：在任何驗算示例中，一旦見到 7641 或 1467，即可立即預判下一步結果為 6174。

8.7 章節小結

本章整理了 9801、55、1089、18、111、10、7641 / 1467 等常數及其數學背景，
說明它們如何協助：

1. 建立差值演算法的邊界與狀態空間（9801, 55）。
2. 提供其他位數模型的對照 (1089)。
3. 強化唯一固定點條件與係數結構（18, 111, 10）。
4. 透過對偶差值理解收斂迴圈（7641 / 1467）。

第 9 章 結論——觀察、反思與未來方向

9.1 核心觀察再回顧

1.

低門檻、深結構:
一條「重排後相減」的簡單規則，
即能在有限步內把 9 000 多個四位整數全部吸進同一終點—6174。

位值係數失衡的效果:
差值公式
$K(N) = 999(a-d) + 90(b-c)$
使最高位差 a−d的權重佔壓倒性優勢，收斂方向因而被「鎖定」。

mod 9 不變量的關鍵角色:
每一步結果皆含因子 9；序列自第一步起便困在 mod 9=0 的同餘類中，
再無逃離可能。

9.2 結構思考帶來的啟示

- 「簡單規則 → 複雜行為」的典型:
- Kaprekar 操作說明：即使完全線性的減法，
- 也能孕育非線性的動態系統。
-
- 不變量與狀態壓縮技巧:
- 使用 (p,q) 差值座標與模 9 分析，
- 大幅減少必須討論的案例，展示「換框架」的重要性。

9.3 開放問題與研究方向

1.更高位數的分類:
5–10 位的黑洞 / 循環清單雖已由程式搜尋獲得,
但尚缺「純理論、無程式」的統一證明。

2.不同進位制的行為:
在 12 進位、16 進位等系統中,
黑洞個數與步數上限仍是一片空白。

3.一般化的差值映射:
若將係數 999,90 替換成其他權重,
可否構造出「多吸引點」或具混沌特質的映射?

9.4 數學之美—最終小結

6174 不僅是一個「可以背下來的神祕常數」，更是一面鏡子：

- 映出位值系統的精密—四個位數的位置互換，足以改變數的千百倍級距。

- 映出模運算的優雅—數位和與同餘類的聯動，把龐大狀態空間折疊成狹窄通道。
- 映出科學思維的全流程—從觀察現象、提出猜想，到找出不變量並完成證明。

正因如此，6174 才能在講壇與大眾分享中反覆被「重新發現」，持續啟發人們對數字規律的無窮好奇。未來，隨著更多程式搜尋與理論推廣的投入，這顆「四位數黑洞」仍將帶來新驚喜，指引我們探索簡單規則背後的深層結構。

參考資料

數學黑洞的魅力：6174到底憑什麼讓你癡迷 - BBC News 中文

卡布列克常數 - 維基百科，自由的百科全書

D. R. Kaprekar - Wikipedia

elementary number theory - Proof of 6174 as the unique 4-digit Kaprekar's constant - Mathematics Stack Exchange 數學論壇討論

number theory - Kaprekar's constant is 6174: Proof without calculation - Mathematics Stack Exchange 數學論壇討論

elementary number theory - Proof of 6174 as the unique 4-digit Kaprekar's constant - Mathematics Stack Exchange 數學論壇討論

Sample Kaprekar Series各位數 Kaprekar 黑洞與循環完整清單