數學魔術

第五組

411231203 應數二 王琬儀

411231210 應數二 黃柏崴

411231217 應數二 李彥槿

411231234 應數二 呂逕穠

411131230 應數三 鍾佳恩

數學魔術（Math Magic）

零、前言：介紹-關於數學魔術

在數學的世界裡，有些數字不僅僅是符號或運算的工具，它們本身就蘊含著令人驚奇的規律與特性。有些數字在加減乘除後會出現驚人的對稱性，有些則在重複運算中形成循環或魔幻般的結果。本報告將介紹幾個具有特殊性質的數字，並透過簡單的數學運算，探索它們背後的奇妙邏輯與數學之美。

一、魔術一：黑洞數

1. 卡普雷卡爾常數（Kaprekar's constant）

又稱卡布列克常式（Kaprekar's routine）、卡布列克常數、卡普雷卡爾常式、黑洞數，是指一種專指四位數的特定函數關係，在某排列順序後，其演算式最後都會對應到 6174 。因此又名：6174 問題、數字固定點、數字黑洞等...。

黑洞數是指無論怎樣設值，在規定的處理法則下，最終都將得到固定的一個值，再也跳不出去，就像宇宙中的黑洞一樣。而對於卡布列克常數來說，黑洞數指的是對於任意的四位數，只要數字不完全相同，將數字由大到小的排列減去由小到大的排列，用同樣的規則繼續算下去，最後的結果一定是 6174。

舉例：假設一開始選定 9891 .

f(9891) = 9981 - 1899 = 8082
f(8082) = 8820 - 0288 = 8532
f(8532) = 8532 - 2358 = 6174
f(6174) = 7641 - 1467 = 6174~

其他的符合條件的四位數（四個數字不完全相同）經過一系列上述稱為卡普雷卡爾運算的過程後，在七步之內都會對應到 6174。而 6174 本人又會無限循環到 6174，這種現象類似黑洞（進去後就出不來了），故稱為黑洞數。

2. 魔術過程

2.1. 前情提要：我們要駕駛著太空船探索宇宙中不同的行星，行星的編號是從 0001～9998且四位數字不能相同 ，而我們需要按照下面的步驟來決定要前往哪一顆行星。

2.2. 將目前的星球號碼「位數」重新排列，分別排出最大的數(位數的數字由大到小)與最小的數（位數的數字由小到大）。比方說 0314 重排後可以得到的最大數字是 4310，最小的數字是 0134。

2.3. 將最大數減去最小數，得到一個新的數字。例如 4310 – 0134 = 4176。

2.4. 報告者：在我們開始旅行前，我將會寫下一個預言（紙上寫下 6174 並放在桌上）。

挑選一為幸運觀眾任選四位數（四個數字不完全相同）並重複前面的兩個步驟，最後的結果一定是 6174，此時翻開一開始寫下的預言，我預測到了這趟旅行的終點。而其實 6147 並不是一顆行星，而是一個黑洞。

3. 歷史

6174是由印度的一位老師卡普雷卡爾（D.R.Kaprekar）發現的，這位老師的興趣就是觀察、把玩數字。1949年他在印度的一場數學會議上分享了6174的奧妙。儘管當時沒得到太多注意，但「不管怎麼算都會卡在6174」這個數學結果在當時沒有社群網路的時代也迅速擴散出去，聞名全世界數學界。因此，6174便以這位老師命名，稱為卡普雷卡爾常數（Kaprekar's constant）。

前蘇聯作家高基莫夫，在其所著數學的敏感一書，曾將其列為「沒有揭開的秘密」。目前，這個問題已獲得解決。解決的方式在於「任意整數之固定點及k次循環之搜尋」。

日本大阪經濟大學教授西山豊（Yutaka Nishiyama）認為，6174真是個「謎一樣的數字」。西山教授用電腦查證是否所有的四位數都能在有限步驟內得出6174。他發現，根據卡普雷卡爾的算法，所有四位數（只要四位數不重覆）最多只需要7步運算就會得出6174。

4. 其它位數的狀況

其實並非只有四位數有這樣的狀況，三位數也有一黑洞數495，任何三位數經過這樣的運算都會對應到495。其它位數就沒有像三位數及四位數這樣單純的狀況，會對應到不只一種結果，或是進入數字循環（即數個數循環對應）。

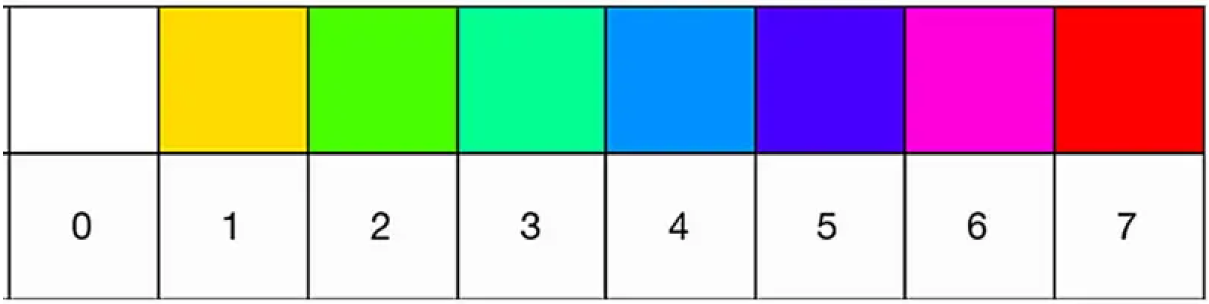
位數	黑洞數	數字循環
2位數	X	1個5成員的循環
3位數	495	X
4位數	6147	X
5位數	X	3個循環
6位數	631764、549945	1個7個成員的循環
7位數	X	1個8成員的循環
8位數	63317664、97508421	2個循環
9位數	554999445、864197532	1個14個成員的循環
10位數	6333176664、9753086421、9975084201	5個循環

5. 應用

5.1. 圖畫

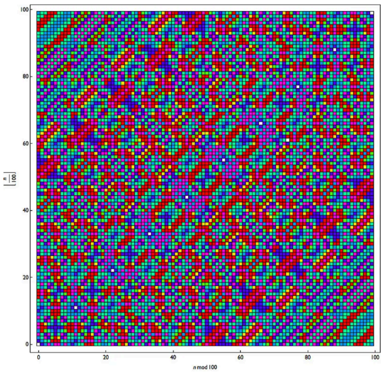
印度城市孟買南部的「Scigram技術基金會」為鄉村、偏遠地區學校開發「IT學習平台」，該公司的創始人表示，他希望證明數學同樣很有趣，以此鼓勵學齡兒童，特別是那些痛恨數學的孩子。而他們選定特殊的6174，試了試這個數字和顏色關係的有趣之處。

首先Scigram團隊給得出6174這個常數的不同運算步驟編上顏色碼。

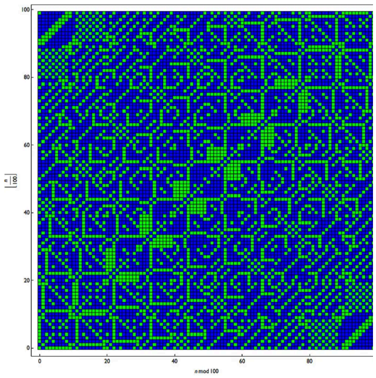


圖一、顏色與步驟代碼索引

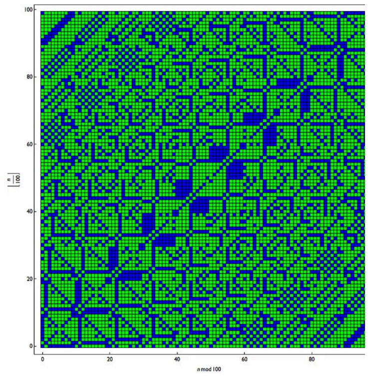
然後，用學校中常用的樹莓派（Raspberry Pi）廉價電腦、Wolfram編程語言解讀已有的一萬個四位數得出6174常數所用步數，排列在彩色網格上。



圖二



圖三



圖四

- 圖二為按照剛剛上述的填色方式所出現的結果。
- 圖三為藍色代表奇數、綠色代表偶數所出現的結果。
- 圖四為綠色代表質數，藍色代表其它數字所出現的結果。

我們可以發現上述的圖畫中都展現出了美麗的對稱與驚人的規律。

5.2. 音樂

有人發現最多需要走 7 步，剛好跟 7 個音階相同，把它拿來譜成一首曲子。甚至有一個樂隊的名字就叫做 Kaprekar's constant。

6. 延伸探討

在數學中，三位數黑洞數字 495 與四位數黑洞數字 6174，一同被稱作卡普雷卡爾黑洞。而卡普雷卡爾黑洞並不是目前發現的唯一一種黑洞數，回憶一下黑洞數的定義：黑洞數是指無論怎樣設值，在規定的處理法則下，最終都將得到固定的一個值。下面再多介紹兩種黑洞數。

6.1. 123黑洞（西西弗斯串）

任取一個數字，數出它的偶數個數、奇數個數及總的位數。例如1234567890，其偶數個數總共 5 個，奇數個數也為 5 個，數字總數為 10 個。按「偶 – 奇 – 總」的位序排列，得到新數為：5510。重複上述步驟，得到 134 ;再重複，得到 123。任意一個數按上述算法經有限次重複後都會得到123。換言之任何數的最終結果都無法逃離 123 黑洞。

6.2.　153黑洞（自戀性數字黑洞或水仙花數黑洞）

當一個n位數的所有數位上數字的 n 次方和等於這個數本身，這個數就叫自戀數。顯然 1，2，3，…，9 是自戀數。三位數中的自戀數有四個：153、370、371和407（這四個數被稱為「水仙花數」）。同理還有四位的「玫瑰花數」(1634、8208、9474)、五位的「五角星數」(54748、92727、93084)。當數字個數大於五位時，這類數字就統稱為「自冪數」。

自戀性數字也是黑洞的一種。例如，取任意一個可被3整除的正整數，分別將其各位數字的立方求出，將這些立方值相加組成一個新數，然後不斷重複這個過程，最終結果一定為 153。

二、魔術二：讀心術猜數字

1.　讀心術

1.1.　魔術步驟：

1.1.1.　你心中想一個10~99的整數。
1.1.2.　將所想的數加上其個位數和十位數，然後告訴我這個數字。
例如心中想的是15，就和我說15+1+5=21。

1.2.　解題過程：

一開始的數字把它看成10a+b，再加上他的十位數a還有個位數b，給到我們的數字就是11a+2b。此時用這個數字除以11會有兩種可能：

- 餘數是**偶數**=>滿足餘數2b，則答案的十位數就是除出來的商，個位數是餘數除以二。
- 餘數是**奇數**=>無法滿足餘數是2b，則我們需要將餘數加11後，再除以2即為個位數字，十位數字是除出來的商減掉1及即為答案。

2.　21張撲克牌

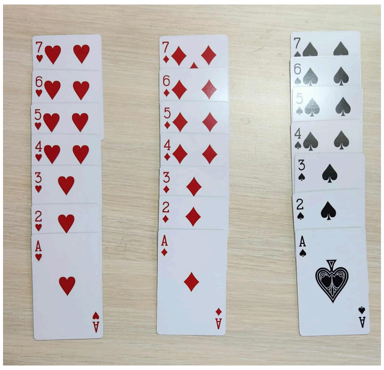
2.1.　魔術步驟：從21張撲克牌中選擇一張牌記住，我會將它分成三堆，你告訴我你想的那張牌在哪一堆，三次之後我就知道你選的是哪張牌了。

2.2. 解題過程：

2.2.1. 一開始我們把三堆牌分成 ABC 堆，在觀眾選出他的那堆牌後我們把那堆牌夾在另外兩堆沒被選的中間。
例如一開始選了 C ，則你讓牌堆形成 ACB 這種樣子，目的是要讓觀眾所選的牌盡考能的待在牌組中間的位置。

2.2.2. 一開始選了C，則 C1~C7 都有可能是目標的牌，在第二次分牌中，C1~C7 會被分在 A'B'C' 三堆的中間。

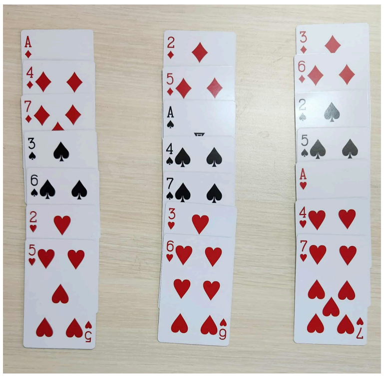
2.2.3. 第二次選完牌後，我們就可以把目標牌的數量減少到最多三張，而第三次分堆會將剩下可能的目標牌分在不同的三堆中並且目標牌皆處於三堆的中央。



圖五

圖五是以黑桃 A 作為目標牌作的第一次分排範例。

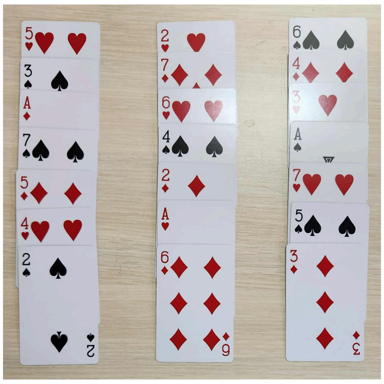
選擇了 C 堆後，我們的目標牌就處於 C1C2C3…C7 中。



圖六

圖六是以黑桃 A 作為目標牌作的第二次分排範例。

前次所確定的 C1~C7 被分在了新的 A'B'C' 的中間位置，分別為 A'4, A'5, B'3, B'4, B'5, C'3, C'，這樣可以確保在下次分排時，沒有剩餘的目標牌會留在同一堆上。



圖七

圖七是以黑桃 A 作為目標牌作的第三次分排範例。

前次所確定的 B'3, B'4, B'5 在這次分排中被分在了 A"B"C" 中中間的位置，此刻對方只要說出是在哪一堆排中，你就可以知道他所選的牌是哪一張了。

3.　推廣

3.1.　除了 21 張牌，還可以用其他張數的牌或其他堆數的牌透過這種方式找到觀眾心想的牌嗎？

3.2.　若你將牌分成 n 堆(n 為奇數)，每輪把觀眾牌放在中間，則最多能處理 $N = n^r$ 張牌，在r輪內找出唯一一張牌。

最少輪數 $r = \lceil \log_n(N) \rceil$。

若 n 為偶數的話，我們無法目標牌放置在中間導致最後目標牌無法收斂至中間，魔術無法成立。

三、魔術三：魔方公式與群論

1.　群

設有一個集合G和G上的「二元運算」(Binary Operation)「・」。如果G的元素和「・」滿足以下「公理」(Axiom)，我們便說(G, ・)構成一個「群」(為了行文方便，有時可以把「群(G, ・)」逕直稱為「群G」)：

1.1.　「封閉性」(Closure)－對G中任何兩個元素a和b而言，$a \cdot b \in G$。

1.2.　「結合性」(Associativity)－對G中任何三個元素a、b和c而言，$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$。

1.3.　「單位元」(Identity)－存在G中一個元素e（稱為「單位元」)，使得對於G中任何元素a而言，$e \cdot a = a \cdot e = a$。

1.4.　「逆元」(Inverse)－對於G中任何元素a而言，都有G中的元素a^{-1}（稱為a的「逆元」)，使得$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$。

2.　「魔方群」(Rubik Group)

將魔方的所有可還原狀態集合中當作元素，我們操作的轉換當作二元運算，這樣看來，魔方的運作完全符合群的定義

2.1.　封閉性 : 在正常轉動下，魔方一直都是可還原狀態

2.2.　結合性 : (RF)F '=R(FF') =R 操作間的複合滿足結合性

2.3.　單位元 : 什麼都不轉

2.4.　反元素 : R有對應的逆操作R'

根據某些數學家的計算，RUBIK元素的數目為 $8! \times 12! \times 3^8 \times 2^{12} / 12 = 4.3252 \times 10^{19}$

3. 魔方還原與子群應用

3.1. 子群

「子群」(Subgroup)的概念。給定群(G, ・)和G的子集H，如果(H, ・)本身也是群，那麼我們說(H, ・)是(G, ・)的「子群」

3.2. CFOP

CFOP 是最常見的解法，它的四個階段分別對應到不同的子群限制：

3.2.1. Cross（十字）：這時候我們不管角塊，也不管頂面，只是處理底部四個邊塊。相當於限制在某些邊的群中。

3.2.2. F2L（前兩層）：我們處理的是四組「邊塊+角塊」配對。為了不打亂十字，我們只允許特定轉法（稱為 commutator）。這些轉法基本上是某些子群內的操作組合。

3.2.3. OLL（頂層朝上）：我們現在只改變頂層的朝向，不移動位置。相當於限制在「只改朝向」這個子群中。

3.2.4. PLL（排列位置）：最後只換頂層塊的位置，不改方向。是「只置換，不旋轉」的群。每一步，都是在一個越來越小的群中進行運算，直到整顆方塊被還原。

4. 交換子群

一個群的交換子（commutator）或換位子是一個二元運算子。設g及h 是 群G中的元素，他們的交換子是$g^{-1} h^{-1} gh$，常記為$[g, h]$。

我們將一些轉動操作命名為A，另一些轉動操作命名為B。此時 $ABA^{-1}B^{-1}$為一種交換子。意思是先做A做B，然後倒回來操作A再倒回B，可以使某些區塊變動，但其他部分不受影響。

5. 共軛子群

對於群 G 中的元素 g 和 n， gng^{-1}稱為n關於 g 的共軛。類似地，對元素 a和 b ，如果存在元素 g使得 $b=gag^{-1}$，可以稱a和b共軛。

我們將一些轉動操作命名為A，另一些轉動操作命名為B，此時 ABA^{-1}為一種共軛子。用A將魔方換個角度做B，之後再A^{-1}倒回角度，為很多魔方公式推導的手段。

四、結論

1. 三個數學魔術例子的統整與其數學概念

本次報告透過三個數學魔術例子，展示數學如何結合遊戲、娛樂與邏輯推理，運用嚴謹的結構設計達成看似神奇的效果，並分析其背後的數學概念：

1.1. 黑洞數：透過數字重組與減法運算，無論初始 4 位數為何（排除相同數字組成者），經過數次操作後皆會收斂至 6174，稱為「黑洞數」。此現象展現了數學中不變點與數列收斂性質的應用。

1.2. 讀心術：透過設計精密的數字排列與運算規則，使觀眾隨機選數後，經運算皆能得出預設結果，營造「預測觀眾心中數字」的效果。背後涉及模數運算、數列規則性與隱藏運算規則設計。

1.3. 魔方與群論：將魔方操作對應至數學上的置換群運算，每次轉動即為一次群運算。透過群論中的結構性分析，有助於系統化還原公式與解法設計，並運用結構分析、群運算性質與組合設計來完成預測控制。

2. 報告過程中遇到的挑戰與解決方式

在實作分析過程中，我們也遇到不少挑戰，經過調整與修正後，逐一克服：

2.1. 黑洞數

2.1.1. 問題：規律不明，只能手動列例驗算，確認是否收斂到 6174。

2.1.2. 解決：透過多組數字操作觀察，查閱資料並輔以數學歸納法確認收斂行為，最後整理成表格，便於報告展示與推廣應用。

2.2. 讀心術

2.2.1. 問題：原先設計的算式過長，觀眾容易看穿固定規則。

2.2.2. 解決：調整數字與運算方式，設計多版本，搭配符號對應表分散注意力，提升魔術效果。

2.3. 魔方與群論

2.3.1. 問題：群論概念抽象，難以直觀對應魔方操作。

2.3.2. 解決：實際拆解魔方、標記轉動位置、畫出變化圖，再對照群運算規則，逐步釐清概念並建立操作對應關係。

3. 學習數學魔術的意義

在本次期末報告中，我們透過三個數學魔術例子，展示了數學如何結合遊戲與娛樂效果，並運用邏輯推理與結構設計達成看似神奇的效果。最後，我們也整理了學習數學魔術過程中所體會到的幾點意義與價值。

首先，學數學魔術的意義在於，它能夠把原本抽象的數學概念，轉化為直觀、有趣且具互動性的遊戲形式。透過這樣的方式，不僅能降低學習門檻，也能讓數學變得更生活化，更貼近日常。另一方面，數學魔術的設計過程，也是對邏輯推理與規則拆解能力的訓練，讓我們在拆解遊戲機制與設計運算過程中，提升自己的邏輯組織與推理能力。

此外，這些魔術背後其實隱藏著「設計」與「數學控制」的概念，每個操作流程都必須精心安排，才能保證觀眾最終得到預期的結果。這讓我們意識到，數學不只是解題工具，更是一種能主動創造秩序與設計效果的語言。

我們也認為，數學魔術本身就是一種思考訓練。透過分析、設計與驗證過程，不僅加強數學能力，更鍛鍊了我們面對問題時拆解與重構的思維方式。而這樣的能力，也能應用在密碼設計、資訊驗證、遊戲互動設計、甚至 AI 推論架構上。

最後，學習數學魔術的過程，也讓我們重新看見數學的趣味性與彈性，證明數學可以很有趣、很生活化，不是只能存在於教科書與考卷裡。

我們也提出一句結語：「學會解題，不如學會設計題目。」因為數學魔術本質上就是邏輯與創意的結合，能透過有趣的方式激發大家觀察生活中數學現象，並鼓勵大家嘗試自己設計數學遊戲或魔術，從中體驗數學設計的樂趣與挑戰。

4. 數學魔術的價值與深度

數學魔術看似是娛樂表演，實則蘊含豐富數學意涵與嚴謹邏輯。我們從以下幾個面向，重新認識數學魔術的價值與應用深度：

4.1. 破除迷思：數學魔術不只是遊戲

許多人誤以為數學魔術只是小孩子的遊戲，與嚴肅的數學研究無關。然而，事實上數學魔術早已被廣泛運用於教學、密碼學、資訊驗證與互動設計領域，許多學術研究也涉獵其中。

同時，也有觀點認為這類魔術不是真正的數學，但數學魔術背後涉及邏輯推演、數列行為、模運算、群論等數學概念，正是數學模型與邏輯結構的應用。

最後，有人認為數學應該保持嚴謹，不能與娛樂結合。我們認為，嚴謹代表邏輯清楚與結構嚴密，嚴密邏輯與結構性思維，完全可以透過趣味遊戲與互動魔術形式，更有效率地傳遞與學習數學概念。

4.2. 數學魔術的學術深度

數學魔術不只是表演遊戲，它涉及眾多嚴謹的數學領域，如：

4.2.1. 群論：魔方還原與操作對應群運算性質。
4.2.2. 數位動態系統：黑洞數透過數列操作達成固定收斂點。
4.2.3. 模運算：讀心術中的運算設計與餘數控制。
4.2.4. 組合設計：數字排列、符號對應與運算順序設計。

此類應用使抽象數學理論轉化為具體操作與互動體驗，展現數學的普遍性與可視化特性。

4.3. 魔術是邏輯預測的極致表現

數學魔術從來不是憑運氣成功，而是透過嚴密設計與邏輯推演完成預測。常見的邏輯技巧如：

4.3.1. 收斂性：數字操作後必然趨近固定值。
4.3.2. 模運算：控制數值結果範圍。
4.3.3. 解構—重構邏輯：拆解問題結構，再重組設計預測效果。

這些技術將數學預測遊戲發揮到極致，證明魔術背後皆是邏輯與數學控制的展現。

4.4. 數學不只是解題，更能講故事與傳遞感動

我們認為，數學魔術的價值不在於「騙過觀眾」，而在於透過驚喜互動，喚醒觀眾對秩序、結構與邏輯的敏銳度。

數學也不只是考卷上的解題工具，更是一種語言，可以用來講故事、設計驚奇、傳遞感動。透過魔術形式，讓數學變得可以被感覺、被體驗、被驚喜，提升數學與人之間的距離感與參與感。

5. 未來發展潛力

數學魔術不只限於表演與遊戲，它在多個領域皆具發展潛力：

5.1. 數學教育

透過數學魔術引發學生興趣，建立問題意識與邏輯思考能力，降低學習門檻，提升數學學習動機。

5.2. 資訊安全與密碼設計

數學魔術常運用的模運算與餘數設計，正是現代 RSA 加密系統與驗證機制的基礎，具有實務應用價值。

5.3. 表演藝術與互動設計

結合數學與表演藝術，創造融合邏輯預測與觀眾互動的沉浸式體驗，應用於展演、互動裝置與遊戲設計。

5.4. AI 自動驗證與推理系統

AI 驗證碼設計、遞迴驗證演算法等技術，實際上與魔術中的邏輯設計、收斂與模擬驗證機制密切相關，可作為演算法優化與驗證方法開發的基礎概念。

6. 總結

透過數學魔術的學習與設計，我們不僅體驗了數學的趣味與應用，更認識到它作為創作工具、預測語言與互動載體的價值。

我們希望未來能將這樣的概念推廣到教學、互動設計、資訊安全與 AI人工智慧等

領域，發展更多結合數學邏輯與創意設計的應用，讓數學真正走入生活、娛樂與科技之中。

五、參考資料

1. 數學黑洞計算－卡普雷卡爾常數
https://numeracylab.com/archives/1171
2. WIKI－卡布列克常數
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%8D%A1%E5%B8%83%E5%88%97%E5%85%8B%E5%B8%B8%E6%95%B8
3. 數學黑洞的魅力：6174到底憑什麼讓你癡迷
https://www.bbc.com/zhongwen/trad/science-50601155
4. 黑洞數字指什麼意思 目前已經發現的數學黑洞類型大全
https://kknews.cc/science/ap5v3y6.html
5. 數學黑洞究竟有多「黑」？看了嚇死你！
https://kknews.cc/science/r9qgpev.html
6. 群論與魔方，群論的基礎知識
https://chowkafat.net/Rubik2.html
7. 通過魔方上群結構了解魔方的性質
https://www.bilibili.com/video/BV1oD4y1s7R7/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click
8. 當魔方與群論結合，還是玩具嗎
https://www.bilibili.com/video/BV1xZ421T7sB/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click
9. 魔方深層原理，人類不是推不出攻式!
https://www.bilibili.com/video/BV16S411c7ap/?spm_id_from=333.788.recommend_more_video.0
10. 【數學魔術】身為一位數學老師，會讀心術猜數字也是合情合理（？） - 猜二位數
https://vocus.cc/article/63df246efd897800013f8c0b
11. 撲克牌魔術 教學 ｜用數學邏輯搭配21張牌，即可變出如神一般的超厲害魔術！完全不用練習（21張牌）｜11本書「懶人魔術企劃#5」
https://www.youtube.com/watch?v=E-k5IxTsT7w

附錄一:常見問答集

為預測現場觀眾可能提出之問題，本組事先設計並準備以下常見問答，供報告當天與報告書審閱時參考。

Q1：黑洞數是不是只有 4 位數才有？其他位數也可以嗎？

A：其實其他位數的數字也可能會有類似的收斂現象，但不一定會收斂到與 4 位數相同的 6174。例如 3 位數或 5 位數也可能有自己的「黑洞數」或是形成數列週期。我們可以透過相同的運算方式與數學歸納法進行觀察與分析。

Q2：如果讀心術的數字或規則被觀眾發現，該怎麼辦？

A：這正是數學魔術有趣且具挑戰性的地方！當觀眾逐漸意識到規則時，我們可透過調整題目內容、變化運算步驟，或加入額外條件與特殊設計，讓規則變得更加隱蔽，同時轉移觀眾注意力，維持魔術表演的驚喜效果與趣味性。

Q3：群論除了用在魔方，還有哪些生活應用？

A：群論在許多領域都能廣泛應用，例如：

- 密碼學中的演算法設計與加密機制
- 機器人運動控制中的多軸轉動與位移調整
- 3D建模與動畫設計中的物體旋轉與位置排列
- 化學分子結構與對稱性分析
- 遊戲開發中的角色動作與視覺特效排列設計

群論能協助系統化分析與管理變化與對稱性問題，應用於科學、工程與資訊科技領域。

Q4：你們做過的這三個魔術裡，哪一個最難設計或破解？

A：魔方與群論部分最具挑戰性。因群論概念抽象，且魔方轉動對應置換群方式需逐步拆解、標記與記錄，理解與操作過程相對複雜，但也因此最具成就感與學習價值。

附錄說明:

本問答集為本組事先預備之可能觀眾提問與應答內容，亦可作為日後相關課程教學或互動設計參考資料。