數學發展歷史—數學三大危機

第六組組員
411231242蕭應科
411131212吳濟羽
410931231陳敬棋

目次

第一次數學危機前的數學發展

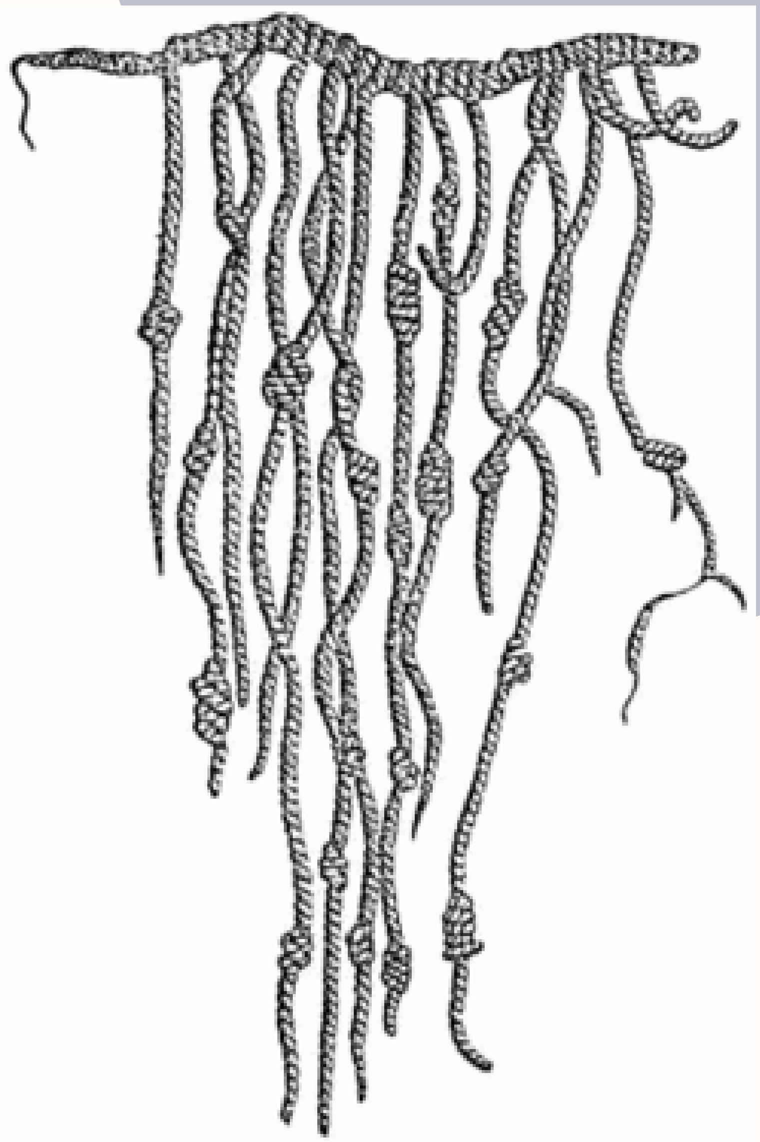
史前數學

以自然規律來衡量時間與數量 最早的數學工具之一

史前的人類就已嘗試用自然的法則來衡量物質的多少、時間的長短等抽象的數量關係，如時間－日、季節和年。算術(加減乘除)也自然而然地產生了

公元前五千年左右的古埃及已經出現用圖像表示空間概念的做法。英格蘭和蘇格蘭的巨石遺址中，也有人認為融入了圓形、橢圓形等幾何結構

目前公認最早、無爭議的數學史料來自古巴比倫與古埃及文明。在這些早期社會中，數學主要應用於稅務、貿易、土地丈量與天文觀測等實際需求，這些應用也逐漸推動了人類對數量、空間、時間的深入研究，為日後數學理論的發展打下基礎



奇普

印加帝國時所使用的計數工具

古巴比倫時期

美索不達米亞地區的數學發展

巴比倫人使用六十進位制，這套系統影響深遠，至今仍保留在我們的時間與角度單位中，同時，他們也發展出類似現代十進位的位值制系統，左邊的數字代表較大數值，讓加減乘除運算更有效率，然而，缺乏類似十進制的小數點

蘇米爾人就已建立計量制度，並在前2500年左右寫下乘法表和幾何習題。巴比倫人不只擅長計算，還能處理分數、代數、一元與二次、甚至三次方程式，並建立了倒數與近似值表格

在塞琉古時期，他們甚至發明了作為空位符號的「零」，雖然尚未發展出完整的數學邏輯與證明體系，但這些成就已為後世打下深厚基礎

古巴比倫人的數學表格《普林頓 322》，斷代為公元前1800年寫成

古埃及時期

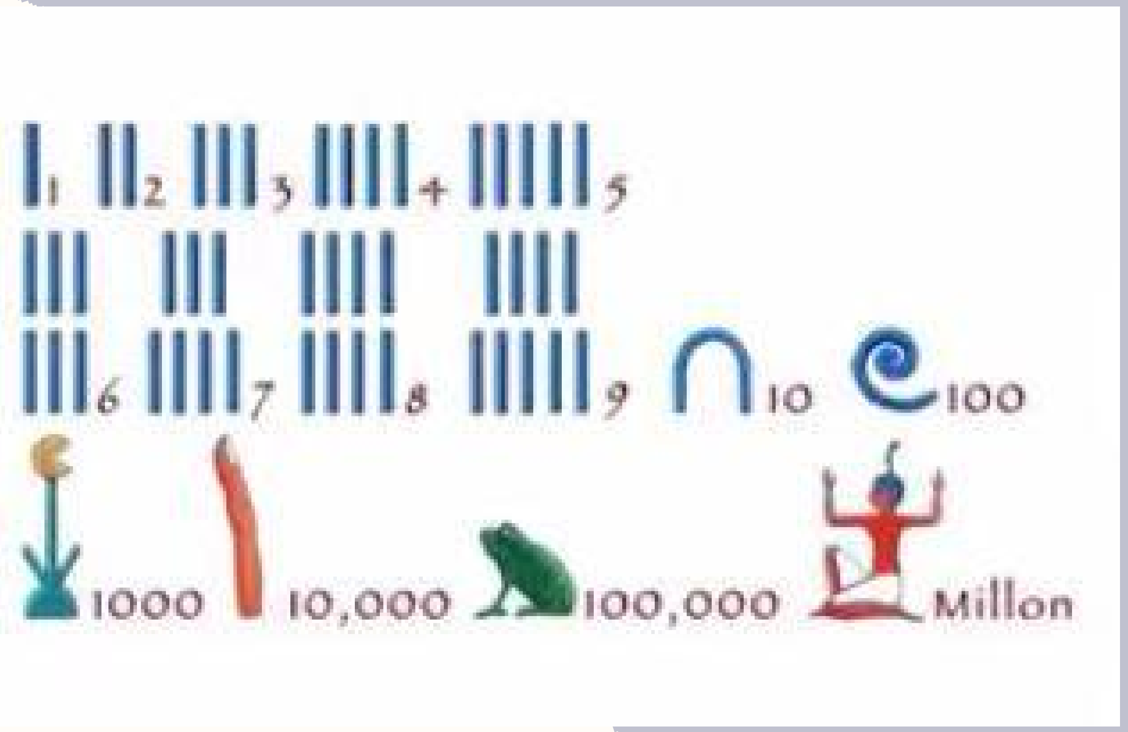
代數和幾何教材、面積公式、乘法除法分數的知識

萊因德數學紙草書，公元前1650年，以實用問題為主，具系統性的數學教材

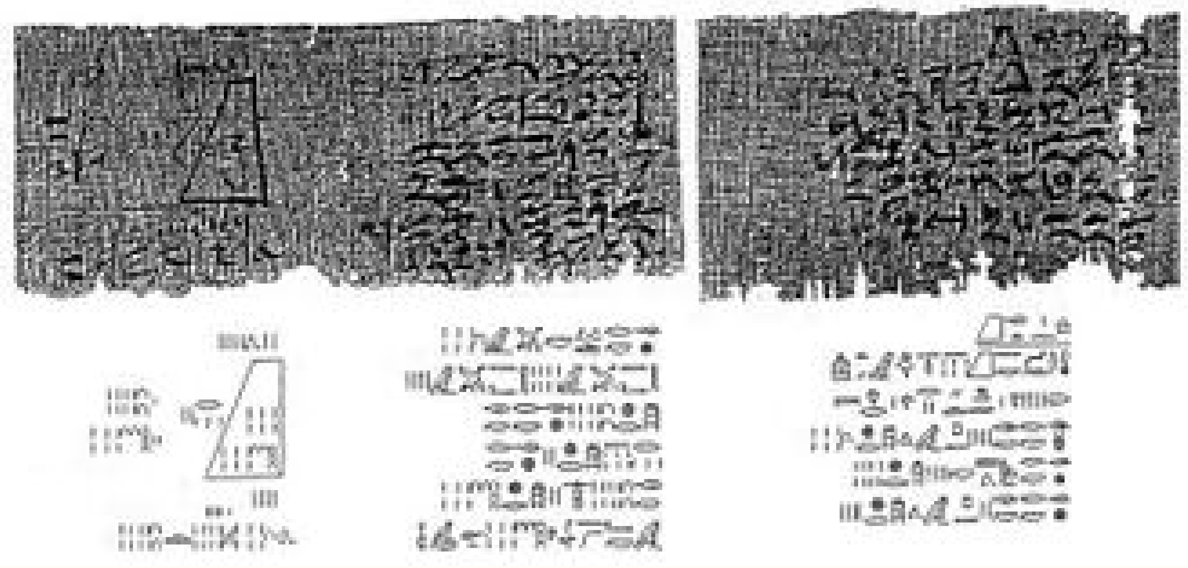
莫斯科紙草書，公元前1890年，內容形式接近今日的應用題

柏林紙草書6619，顯示古埃及人已能解出類似二次方程式的問題，代表他們對代數概念已有初步掌握

以實用為導向，並已具備一定的邏輯與計算深度，在工程與日常管理中發揮了關鍵作用



可知古埃及人已採用10 進位的象形符號。荷花表示1000；手指表示10000；用蝌蚪代表100000，因為蝌蚪能大量繁殖，取其眾多之意



計算錐台面積，截斷角錐尺寸的插圖

古希臘時期

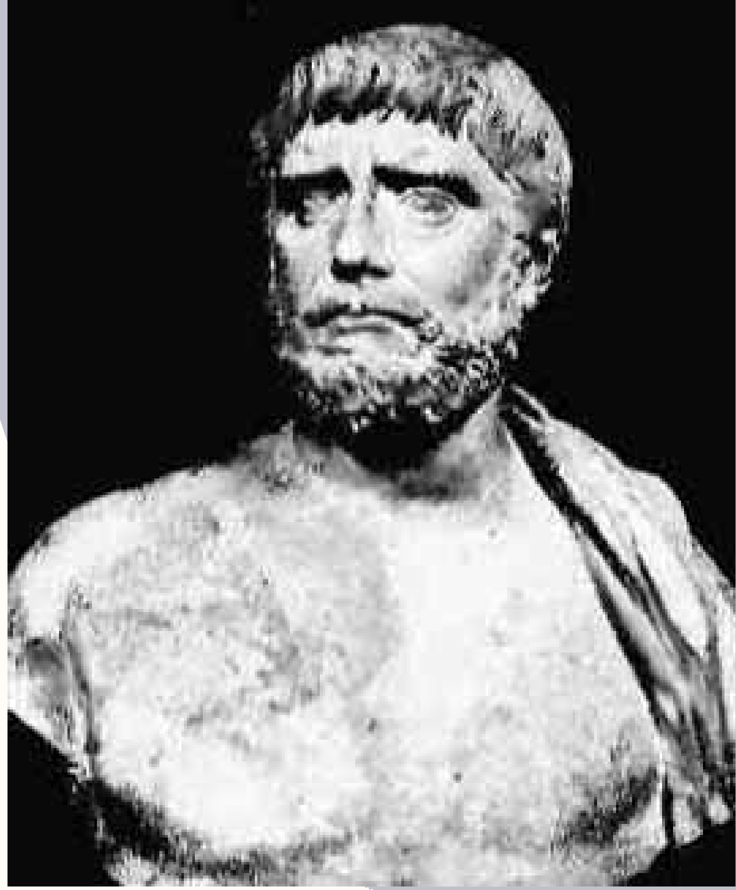
強調演繹推理　從公理與定義出發 以系統性的證明

《幾何原本》西方史上第一個文字記載的系統化科學思維，有一套相當清楚的脈絡：
1.公理：一些你無法反證，因此接受它是一定正確的敘述，完全不去懷疑它。
2.邏輯：在你接受公理為真的基礎上，用來演繹一些結論的必然法則。
3.定理：公理透過邏輯演繹之後，所得到的結果。

用了五個公理跟五個邏輯用法，推導出四百六十五種定理。

泰勒斯

被譽為是第一個真正的數學家 第一個有署名的數學發現



被認為是將演繹推理應用到幾何學的第一人

在幾何學中下列的基本成果歸功於他

1.圓被任一直徑所平分。

2.等腰三角形的兩底角相等。

3.兩條直線相交對頂角相等。

4.已知三角形兩角和夾邊，三角形即已確定。

5.對半圓的圓周角是直角。

6.相似三角形的對應邊成比例

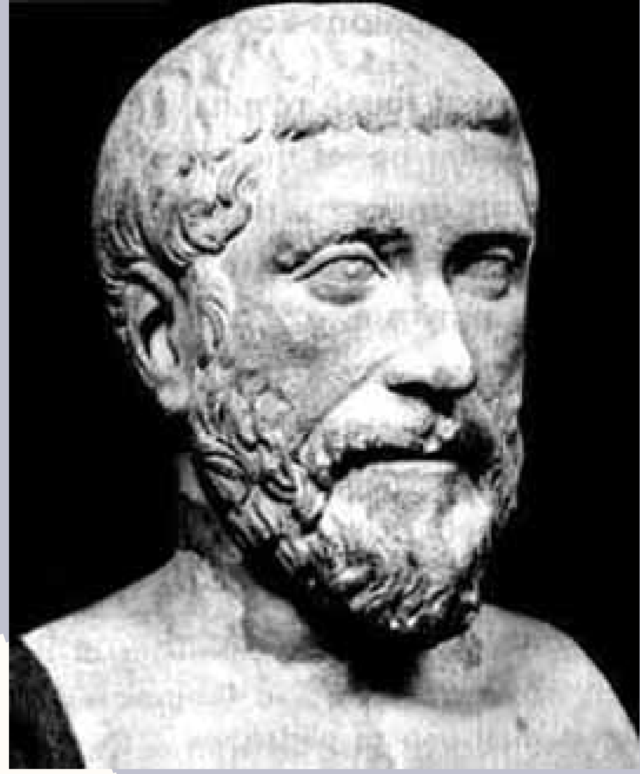
引入了命題證明的思想

1.保證命題的正確性，使理論利於不敗之地。

2.揭露各定理之間的內在聯繫，使數學構成一個嚴密的體系，為進一步發展打下基礎。

3.使數學命題具有充分的說服力，令人深信不疑

畢達哥拉斯



數學統治著宇宙「萬物皆數」

「在一個直角三角形，斜邊的平方是兩股平方和。」
這個定理中國人（周朝的商高）和巴比倫人早在畢氏提出前一千年就在使用，但一般人仍將定理歸屬於畢達歌拉斯，是因為他證明了定理的普遍性。畢氏認為尋找證明就是尋找認識，而這種認識比任何訓練所累積的經驗都不容置疑，數學邏輯是真理的仲裁者

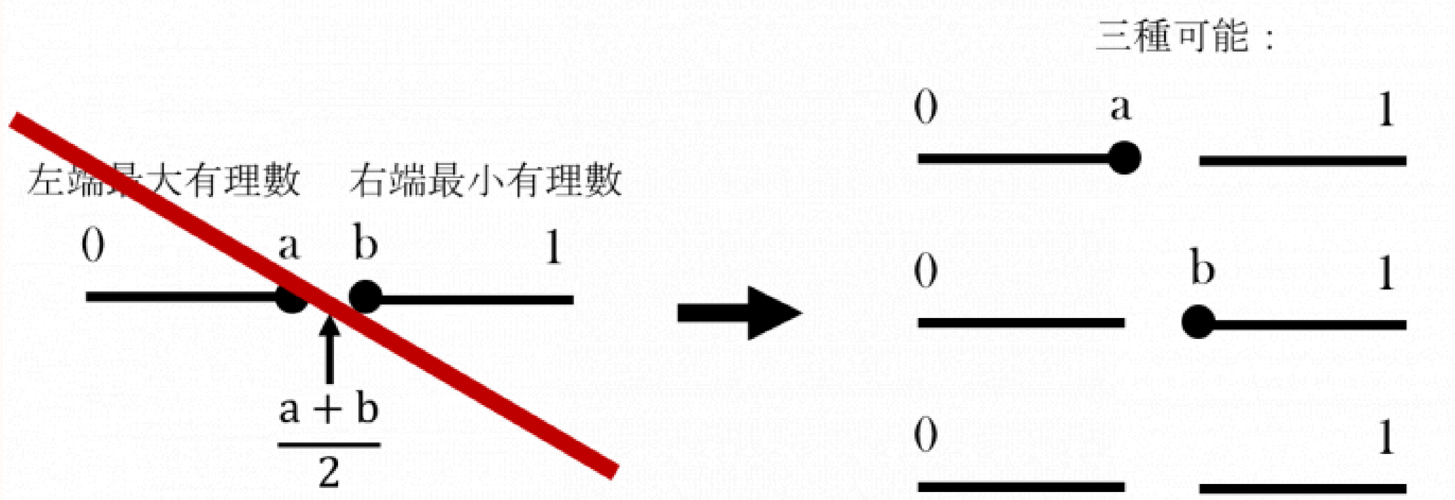
數學之美在於有理數能解釋一切自然現象
無理數的存在會引起對他信念的懷疑。希帕索斯經洞察力獲致的成果一定經過了一段時間的討論和深思熟慮，畢氏本應接受這新數源。然而，畢氏始終不願承認自己的錯誤，卻又無法經由邏輯推理推翻希帕索斯的論證。使他終身蒙羞的是，他判決將希帕索斯淹死

第一次數學危機—無理數的發現

畢氏定理：直角三角形兩邊長平方和等於斜邊長平方，卻也發覺到：邊長為 1 的直角三角形，其斜邊長無法用正整數和分數這樣的有理數來表達。
√2 雖然不是有理數，卻也能用尺規作圖的方式將它畫在數線上，顯然也是數線上的一個點
為免讓學派基礎瓦解，畢氏學派的人們維護著這個秘密。希帕索斯對外人洩漏了秘密，因而以「瀆神」的罪名被扔到地中海裡
人們也將 √2 、 π 這類數稱為「無理數」，在希臘時代稱為不可公度量

歐多克索斯透過「比例論」，緩解了這次數學危機，「兩個圓面積」等於「兩個正方形面積」之比
迴避了把無理數作為數來處理。「宇宙萬物皆為整數或整數比」的錯誤還是沒有解決

連續與無理數



戴德金分割

1872 年德國數學家戴德金 (Dedekind)承襲了歐多克索斯的思想、發表了一篇著名的論文

假設我們把 0 到 1 的線段切斷，切斷的斷點都是有理數，左端線段的斷點是其上最大的有理數 a、右端斷點是最小有理數 b。
但中間應該要有 (a+b) / 2 的值存在

所以要麼斷點只有一個有理數存在，要麼不存在有理數。那不存在有理數，這條線又是連續的，所以是存在什麼呢？我們稱為無理數

有理數雖然多到在數線上滿滿的、是稠密的，但它們彼此並不連續，沒辦法形成一個連續統 (continuum)

有理數和有理數之間的洞，都是由無理數填補起來的。這條線我們就稱為實數線，實數由有理數和無理數所構成
確立的無理數在數學中的合法地位，真正徹底解決了第一次數學危機

柏拉圖

數學家的締造者

柏拉圖十分強調脫離直觀印象的純理性證明，十分重視整數的學問，他在很大程度上繼承了畢氏學派的『萬物皆數』的觀點。他認為宇宙間的天體以至萬物都是按照數學規律來設計的。依賴感官所感覺到的世界是混亂和迷離的，因而是不可靠的和無價值的，只有通過數學才能領悟到世界的實質

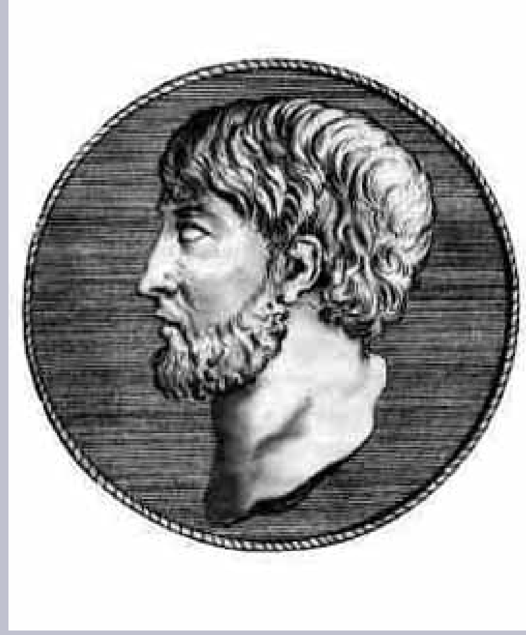
柏拉圖學派主張嚴密的定義與邏輯証明，促成了數學的科學化

柏拉圖學派在數學中引入了分析法和歸謬法；他給出了點、線、面、體的定義；他對軌跡也有較早的認識，還研究了棱柱、棱錐、圓柱、圓錐的問題。在算術方面，他們發現了級數的不少重要性質

他的學生歐多克索斯發展出「窮竭法」，這是積分思想的前身，用於計算曲線圖形的面積與體積。他也創立了比例論，以應對無理數與無限小的問題，這種方法在後來成為歐幾里得《幾何原本》的核心之一

阿基米德

和牛頓、高斯並列為有史以來三個貢獻最大的數學家



使用了窮竭法求無窮級數的和，計算出了拋物線下的面積

求得了在當時最為精確的π值

旋轉曲面的面積公式（拋物面，橢球面和雙曲面）

阿基米德原理
阿基米德方法
他認為自己最偉大的成就，是發現球形的表面積和體積公式，也就是證明了球外接圓錐的表面積和體積是該圓錐的2/3
計算技巧和嚴格証明融為一體，將抽象的理論和工程技術的具體應用緊密結合

歐幾里得

幾何學之父　求知無坦途

《幾何原本》有邏輯架構的作品，容易使用也容易參考，其中有嚴謹的數學證明系統，是後來2300年數學的基礎
主要對象是幾何學，但它還處理了數論、無理數理論等其他課題

使用了公理化的方法。在這種演繹推理中，每個證明必須以公理為前提，或者以被證明了的定理為前提。
這一方法後來成了建立任何知識體系的典範，在差不多二千年間，被奉為必須遵守的嚴密思維的範例。

《幾何原本》是古希臘數學發展的頂峰。歐幾里得將公元前七世紀以來希臘幾何積累起來的豐富成果，整理在嚴密的邏輯系統運算之中，使幾何學成為一門獨立的、演繹的科學

阿波羅尼斯

創造了三個術語：拋物線、橢圓和雙曲線

《圓錐》是古代最著名和至今保存最完好的著作之一。以不同方向平面切割固定圓錐面來得到不同類型圓錐曲線；

- 將雙曲線兩支視為同一曲線；
- 展示同一圓錐曲線可以有各種建構方法而性質不變；
- 討論了圓錐曲線的交點和交點數、過定點的法線、相同和相似圓錐曲線、橢圓和雙曲線的共軛徑等；
- 發現橢圓不同共軛徑平方和或雙曲線不同共軛徑平方差是常數等。

這些工作為一千八百多年後克卜勒、牛頓、哈雷等數理天文學家研究行星和彗星軌道提供了數學基礎

公元前3世紀—希臘數學的黃金時代

埃拉托斯特尼發明了尋找質數的埃拉托斯特尼篩法；計算出地球的圓周

依巴谷被認為是三角函數的創始人，編制了第一張三角函數表，360度圓周的系統性應用也是自他開始

亞歷山大的海倫被歸功於發現通過三邊計算三角形面積的海倫公式，也是認識到負數可能開平方的第一人

亞歷山大港的梅涅勞斯提出了梅涅勞斯定理，是球面幾何的先驅

古代最完整和最具影響力的三角函數著作是托勒密的《天文學大成》，這是天文學的里程碑著作，其中的三角函數表被隨後的天文學家繼續使用了一千年。利用三角法求圓內接四邊形邊長的托勒密定理也歸功於他本人，托勒密精確計算出了圓周率為 3.1416

公元250到公元350年—希臘數學的「白銀時代」

丟番圖

公元3世紀著成《算術》，開啟不定方程與代數符號的應用，對後來代數學的獨立發展影響深遠。他所研究的問題類型與費馬後來提出的大定理密切相關，成為近代數學突破的伏筆。
《算術》是目前已知第一個使用簡字代數系統及代數符號的文獻

帕普斯

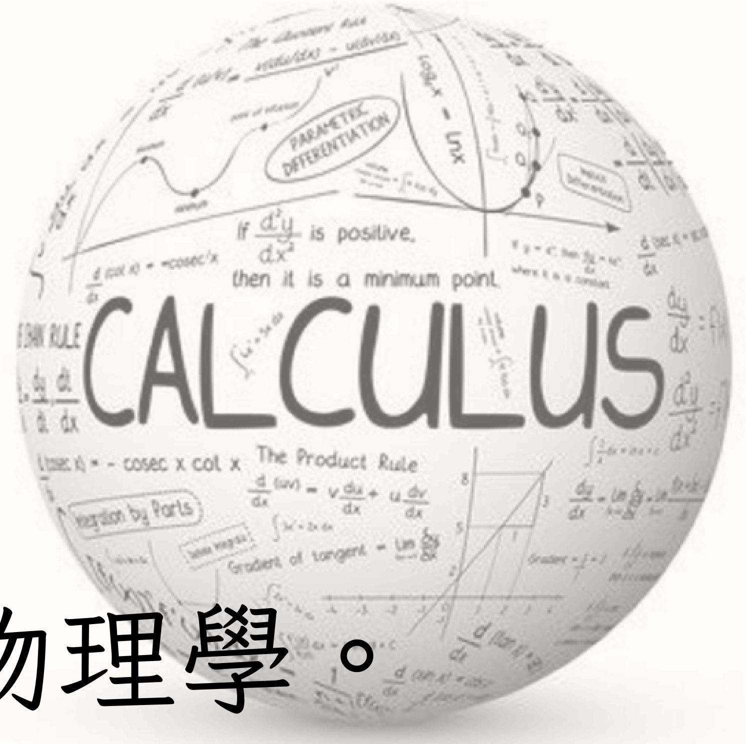
最後一位希臘的偉大數學家，主要的貢獻有帕普斯定理和古爾丁定理，著作《數學彙編》一書記錄了許多重要的古希臘數學成果，因為保存良好，在數學史上意義重大

希帕提婭

第一位有歷史記錄的女數學家，繼承了父親的職位，成為大圖書館的館長
基督教誕生之前，柏拉圖和畢達哥拉斯的哲學學派曾對婦女界作出重大的貢獻，就是創造一種有利的社會環境，使婦女能心安理得地從事學術研究
早期的基督徒在很大的程度上把科學視為異端邪說，把傳播希臘傳統文化的人視為異教徒，希帕提婭因政治與宗教衝突遭受迫害

第二次數學危機:
（微積分的嚴謹性問題）

引言



微積分是研究變化的核心工具，廣泛應用於數學與物理學。

然而，其早期發展依賴直觀但未嚴格定義的概念，引發了「第二次數學危機」（18世紀末至19世紀初）。

這場危機促使數學家重新審視微積分的嚴謹性，最終推動了現代數學分析的誕生。

微積分的起源

牛頓
Newton

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)\,dx$$

萊布尼茲
Leibniz

- 17 世紀，牛頓與萊布尼茲幾乎同時、獨立發展出微積分。
- 牛頓重視物理應用，特別是力學與運動學。
- 萊布尼茲強調符號系統與運輯推理。
- 他們開創了以數學研究導數與積分的新方法。

微積分嚴謹性的質疑:

牛頓與萊布尼茲的微積分缺乏嚴謹的數學基礎，尤其無窮小量 (infinitesimals) 概念模糊

- 被定義為「比任何實數小但非零」
- 計算有效，但邏輯不嚴密

極限、連續、導數、積分 依賴直覺，缺乏嚴格定義

隨微積分廣泛應用，邏輯缺陷逐漸顯現

無窮小量的邏輯困境

牛頓的流數法

- 使用無窮小增量描述變化率。
- 無窮小量有時被視為非零，有時又視為零，邏輯不一致。

萊布尼茲的符號微積分

- 引入 dx、dy 等記號。
- dx 不能為零（否則 dy/dx 無意義），但又在推導過程中被忽略。

貝克萊的批評

1734 年，他在《分析學家》中批評微積分的邏輯漏洞。

並且將將無窮小量稱為：

「幽靈般的不存在量（ghosts of departed quantities）」

貝克萊的批評-(舉例)

以函數 $y = x^2$ 的導數為例，以如下商數進行微分：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

令 Δx 趨近於0，得到導數dy/dx=2x

問題的矛盾點

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

在第一步，Δx不能為0 (否則分母為0)

在第二步，Δx又被當作0 (直接忽略他)

解方

18世紀，達朗貝爾（d'Alembert）提出用「極限」取代無窮小，但未嚴格定義。

而後，經過柯西、魏爾斯特拉斯、戴德金等人的定義及理論才完善了微積分的理論。

柯西（Cauchy）的極限觀念 - 1

在1821年的《分析教程》（Cours d'Analyse）中，柯西首次給出極限的明確定義：

「當一個變量的值無限趨近於某個固定值時，如果其與這個固定值的差可以變得任意小，那麼這個固定值就稱為該變量的極限。」

範例:數列的極限

數列 $a_n = \frac{1}{n}$，當 $n \to \infty$，$a_n \to 0$。

對任意誤差範圍 $\epsilon > 0$，存在 N 使得 $n > N$ 時 $|a_n - 0| < \epsilon$。

此定義已包含「任意接近」的核心思想，成為現代極限理論的雛形。

柯西（Cauchy）的極限觀念 - 2、3

- 「若函數 f(x) 在 x→a 時無限趨近 L，則 L 為 f(x) 的極限。」此思想後來由魏爾斯特拉斯發展為 ε-δ定義。

- 重新定義導數的定義

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

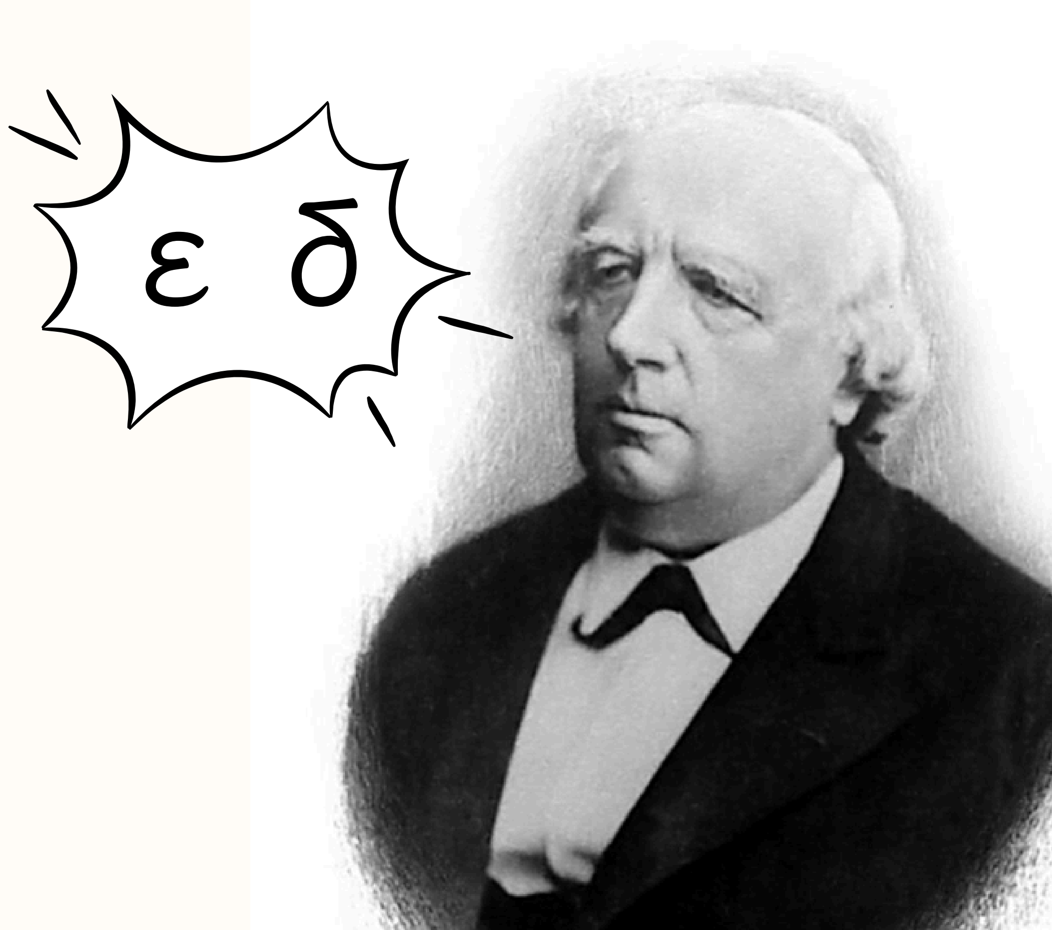
明確指出 h 趨近於 0 而非等於 0，巧妙避開貝克萊悖論。

魏爾斯特拉斯的 ε - δ 語言

魏爾斯特拉斯不滿足於柯西「無限趨近」的直觀描述，他在19世紀中葉提出：

「函數 f(x) 在x→a 時的極限是 L，若且唯若，
對於任意 ϵ>0，存在 δ >0，使得當 0<｜x-a｜< δ 時，有 ｜f(x)-L｜<ϵ。」

這個定義完全消除了「運動」或「趨近」的直觀概念，純粹用 靜態 的不等式描述極限，成為現代數學分析的標準語言。



同時魏爾斯也嚴格定義了函數的連續性以及近一步提出
均勻收斂、均勻連續、等等概念。

若極限是微積分的基礎，則實數是極限的基礎。

戴德金和康乃爾

$$\mathbb{R}$$

戴德金分割 - 用「分割」定義實數

將所有有理數 Q 分為兩類
(A,B)：

- A（下集）：所有小於某數的有理數
- B（上集）：所有大於等於某數的有理數

切割點 即代表一個實數（可能是無理數，如 √2)

例如：有理數 q 滿足 q**2<2 和 q**2≥2 的分割對應√2

意義

填補有理數的「空隙」，嚴謹定義實數的連續性。
為微積分的極限理論奠定基礎。

基於極限理論，導數與積分被嚴格定義

導數:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

積分(黎曼積分):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

微積分最終建立在嚴謹的數學基礎上。

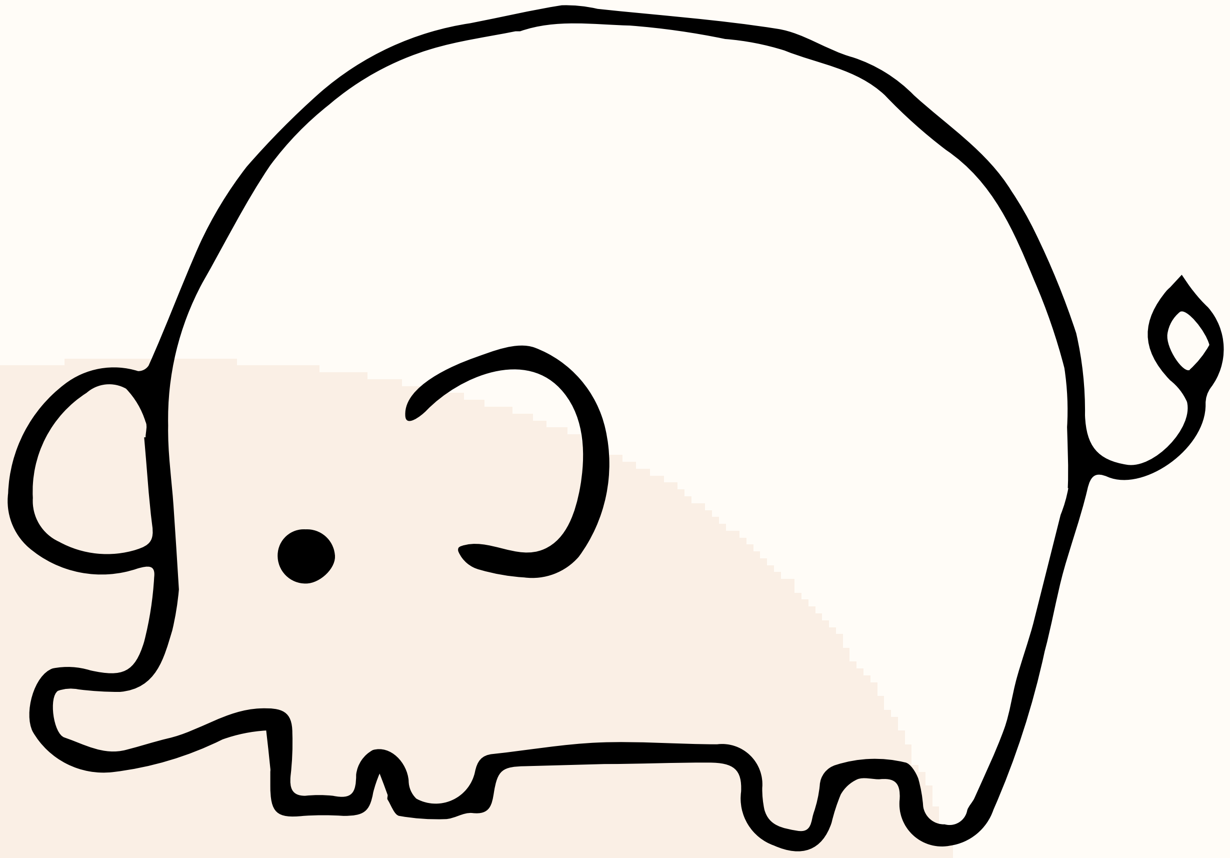
第二次數學危機的意義與影響

這場危機促使數學家從「計算的正確性」轉向「邏輯的自洽性」。
例如:
定理「連續函數在閉區間上必有最大值」的證明，不再依賴圖像，
而是需以實數完備性及 ε-δ 語言形式論證，
而論證的證明依賴於實數的完備性，這與數列極限概念密切相關。

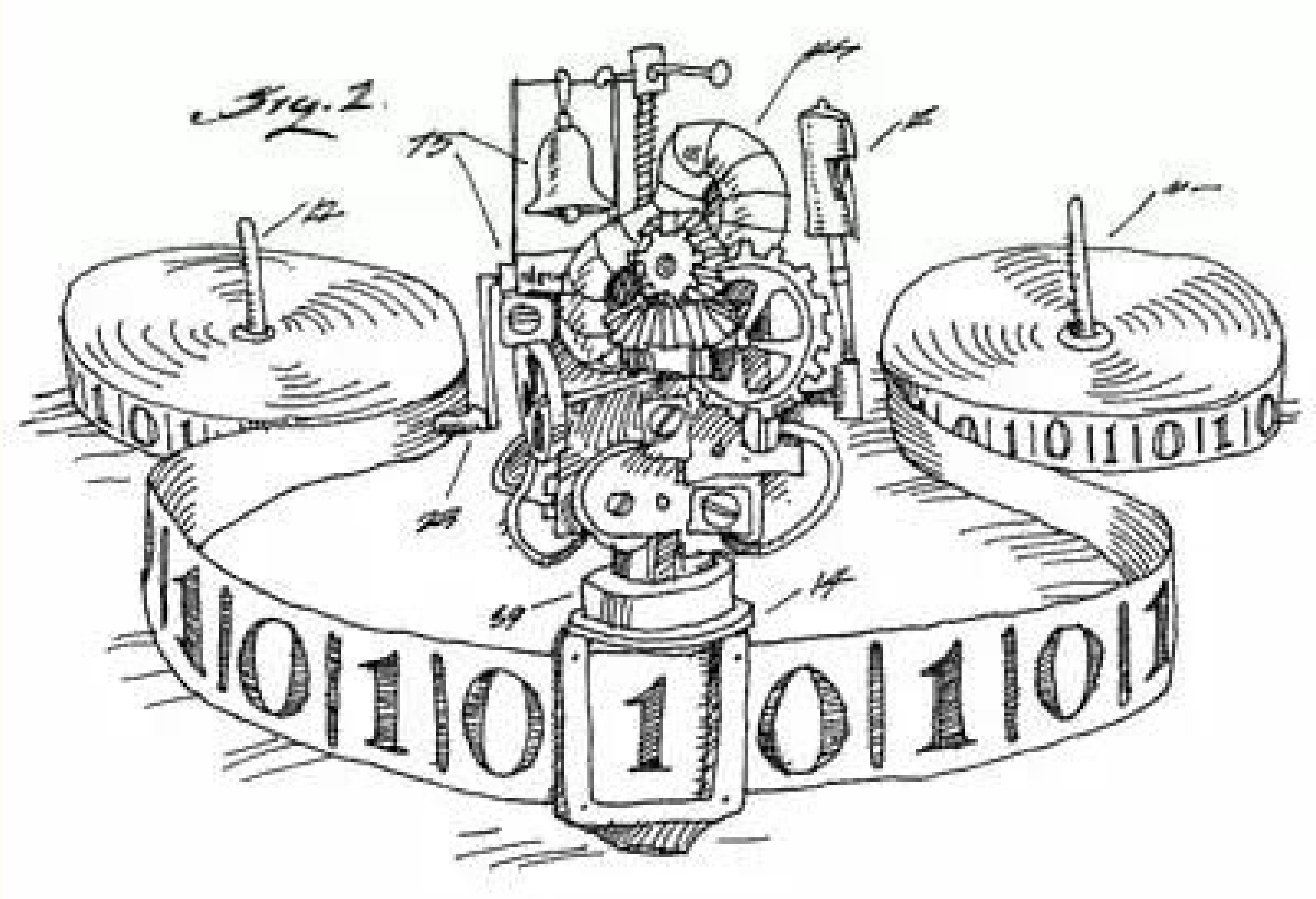
第二次數學危機的解決也直接導致了「現代分析學」的誕生，影響了從數學、物理到各個領域的發展。

「數學教育」也從重視計算技巧轉向重視定義、邏輯與證明技巧。
數學的本質也從「自然科學的工具」轉變為較為「形式系統的研究」。
數學的哲學觀念也出現分歧，例如形式主義、直覺主義與邏輯主義。

第三次數學危機：
計算機時代的邏輯挑戰



引言



回顧數學發展中的危機及其意義

點明其核心與計算機科學的關聯

邏輯主義的困境、哥德爾不完備性定理、圖靈停機問題

背景：數學基礎的探索

前兩次數學危機

邏輯主義:試圖將所有數學建立在邏輯之上

當時數學界的樂觀態度，認為可以找到一個完備且一致的數學體系。

危機的爆發：邏輯主義的挑戰

哥德爾不完備性定理

圖靈停機問題

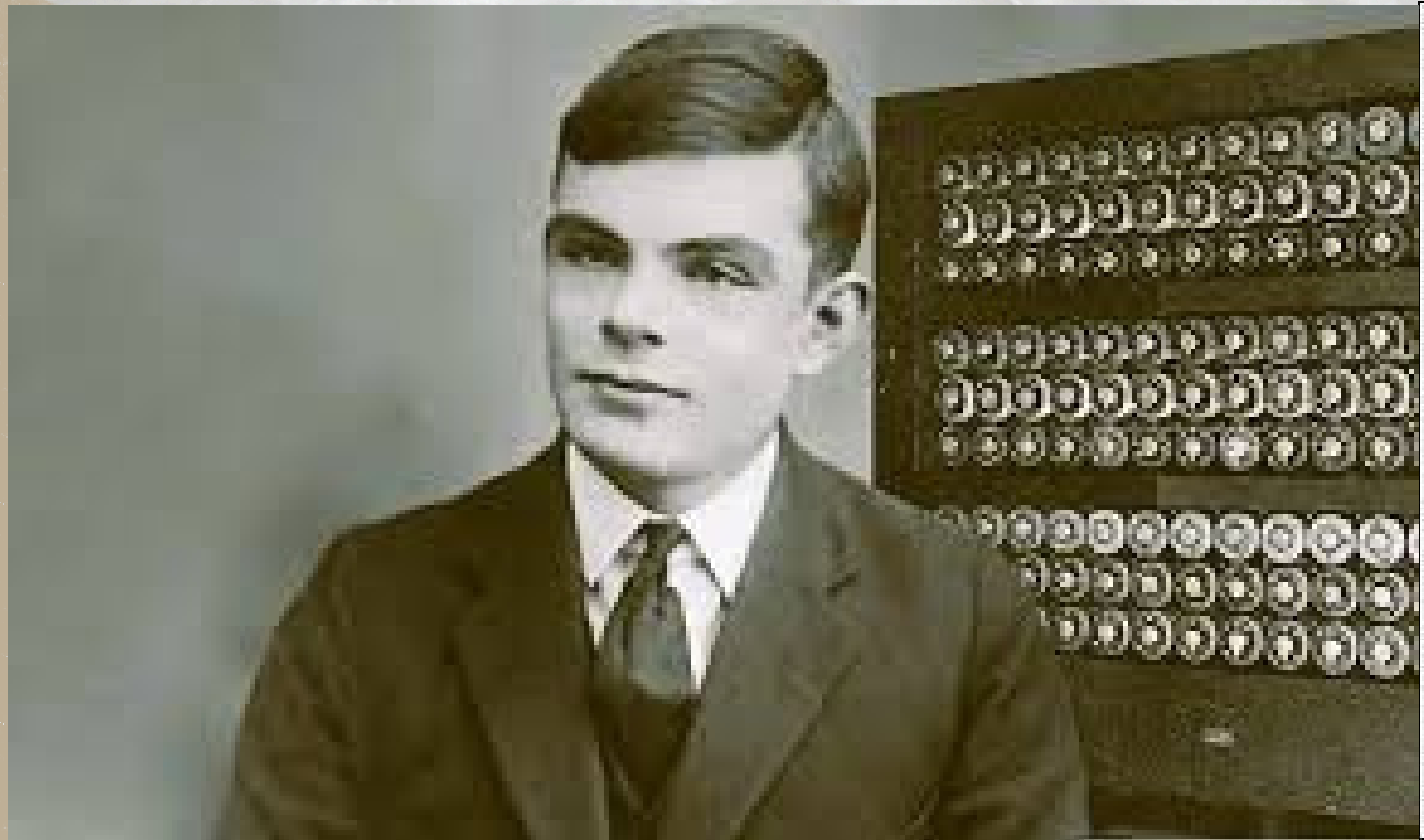
哥德爾不完備性定理

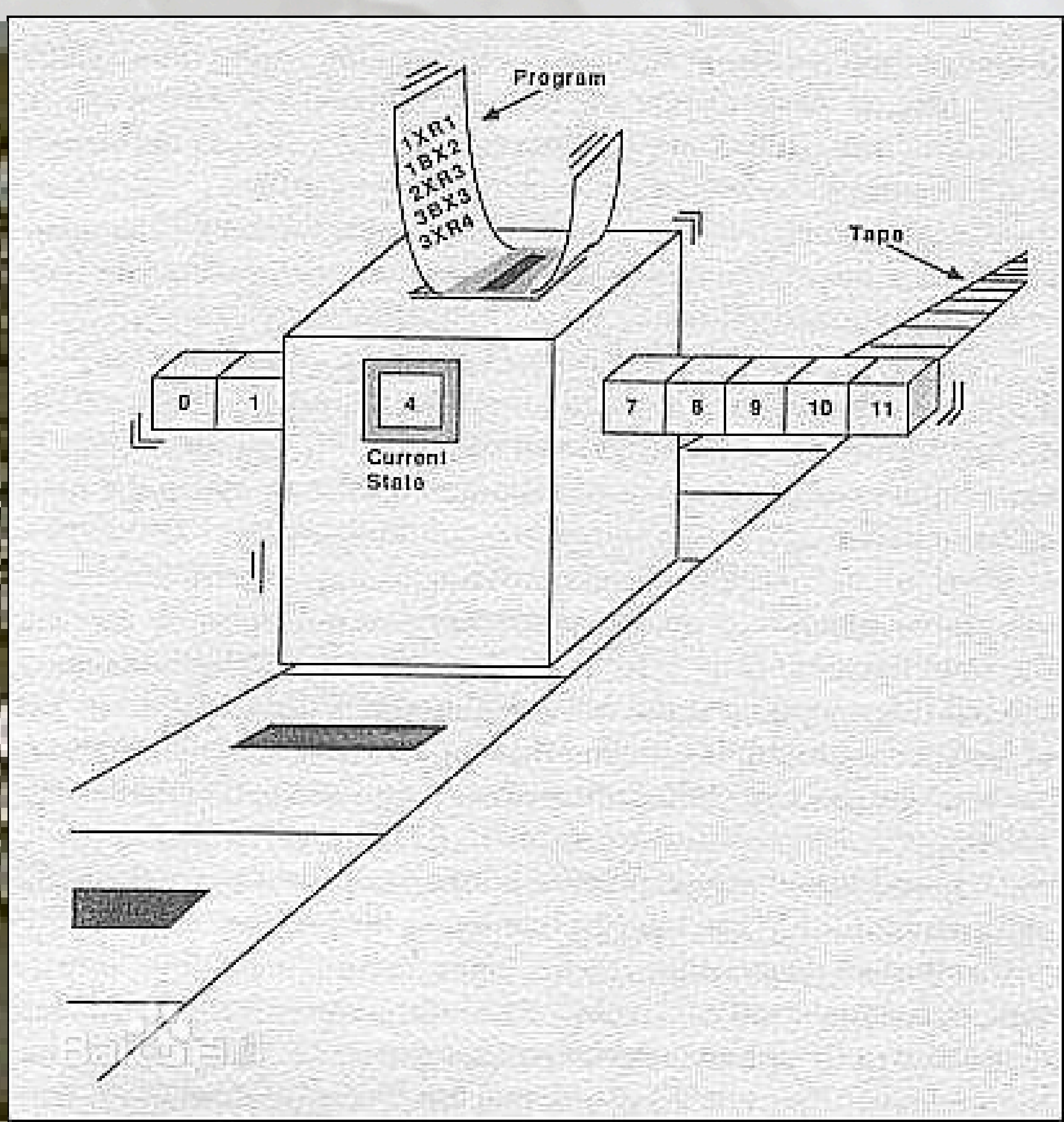
第一不完備性定理:
任何包含基本算術的相容的形式系統，都必然
包含一些命題，這些命題在這個系統內既不能被證明為真，也不能
被證明為假，我們稱之為不可判定命題。

第二不完備性定理:
進一步指出，任何包含基本算術的相容的形式系統都不能證明自身
的相容性。換句話說，一個足夠複雜的數學體系無法證明自己內部
沒有矛盾。這徹底粉碎了希爾伯特提出的通過形式化方法證明整個
數學體系一致性的宏偉計劃

圖靈停機問題

圖靈停機問題的核心是：是否存在一個通用的算法，能夠判斷任意給定的程序和輸入是否會在有限時間內停止運行？





危機的影響與啟示

總結第三次數學危機的主要影響：

- 動搖了邏輯主義作為數學唯一基礎的地位。
- 促使數學家和邏輯學家對數學基礎進行更深入的反思和研究。
- 催生了新的數學哲學流派和邏輯體系。
- 深刻影響了計算機科學的理論基礎，例如算法的界限、可計算性理論等。

結論

總而言之，第三次數學危機是一場深刻的邏輯危機，它以羅素悖論為開端，並通過哥德爾不完備性定理和圖靈停機問題等重要成果而深化。它揭示了數學和邏輯內在的局限性，動搖了試圖為數學尋找絕對可靠基礎的努力，並深刻影響了計算機科學的理論發展。雖然這是一場危機，但它也促使我們對數學的本質進行更深層次的思考，並推動了數學和相關學科的進一步發展。正如歷史所昭示的，數學的危機往往正是其進步的契機。

Thank you!

感謝觀看