數學思維與解題-期末報告(書面)

第七組

411031209 謝燿璘

411031210 馬國凱

411031241 吳宗燁

411031245 廖登峰

【艾雪鑲嵌藝術】

Escher-style tessellation

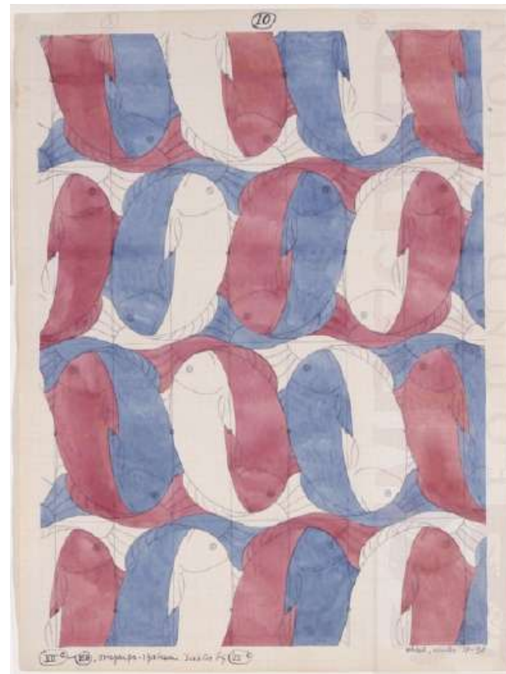
連結

1.簡單介紹:

艾雪鑲嵌（Escher-style tessellation）是一種受荷蘭藝術家 M.C. Escher 啟發的圖案設計方式。艾雪以其精密的幾何構圖與視覺錯覺聞名，他在作品中經常使用鑲嵌圖案來表現無限重複、變化與空間的轉換。艾雪鑲嵌指的是將圖形如動物、人物或其他形狀，經過變形、旋轉、平移等方式，使其能夠在平面上無縫重複排列，達到像拼圖一樣完全填滿空間而無重疊或空隙。這種技法融合了藝術與數學，特別是幾何對稱與群論的概念，廣泛應用於設計、教育與建築等領域，既富美感又具有邏輯結構。

首先探討「正則鑲嵌」與「半正則鑲嵌」與正多邊形的關係，並逐一畫出可能組合的圖像；再探討愛雪法則中「平移」、「滑動反射」、「中點旋轉對稱」、「邊旋轉」等四種方法的組合模式，同時在正方形上的可能性之實際繪圖實作，以分析作品

2.**圖例:**

3.**結構:**

艾雪鑲嵌圖形的結構主要分成「半正則鑲嵌」及「正則鑲嵌」, 以下將會找出所有可以鑲嵌組合的正多邊形。

首先先介紹施萊夫利符號:一種可以表示特定正多邊形或密鋪圖案若干重要特性的符號, 一個有n個邊的正多邊形，其施萊夫利符號為 { n }。

施萊夫利符號可以用來表達四維及以上正多胞形，一個n維正多胞形的施萊夫利符號包含n-1個數字。而每個半正則鑲嵌及正則鑲嵌都有一個特定的施萊夫利符號。

• 半正則鑲嵌

在幾何學中，半正鑲嵌圖是一種平面密鋪，是重複排列組合2種或以上正多邊形，並讓圖形完全占滿整塊平面，而且沒有空隙或重疊。

有時會稱半正鑲嵌圖為**阿基米德鑲嵌**（Archimedean tilings）。

這群正多邊形不需要互相全等，在拼貼時要求條件為:

■頂點碰頂點

■邊與邊密合

■而且都可以往外繼續拼滿整個平面。

因此需滿足圖形頂點所有內角和為 360°, 對應所需個數組合如下:

❶3 個正三角形(內角 60°)+ 2 個正邊形(內角 90°)
➔$3\times60°+2\times90°=360°$

❷4 個正三角形(內角 60°) + 1 個正六邊形(內角 120°)
➔$4\times60°+1\times120°=360°$

❸2 個正三角形(內角 60°) + 2 個正六邊形(內角 120°)
➔$2\times60°+2\times120°=360°$

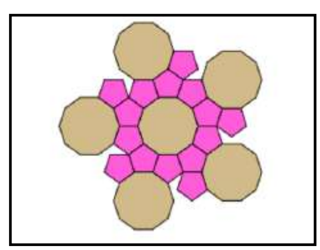
❹1 個正方形(內角 90°) + 2 個正八邊形(內角 135°)
➔$1\times90°+2\times135°=360°$

❺1 個正三角形(內角 60°) + 2 個正十二邊形(內角 150°)
➔$1\times60°+2\times150°=360°$

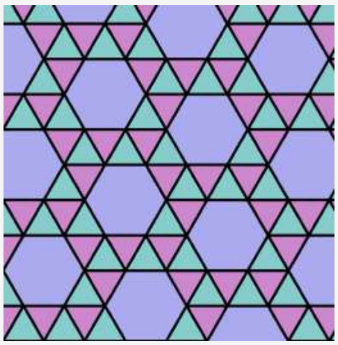
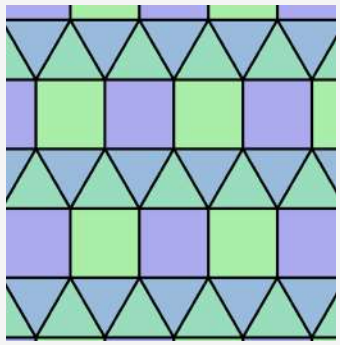
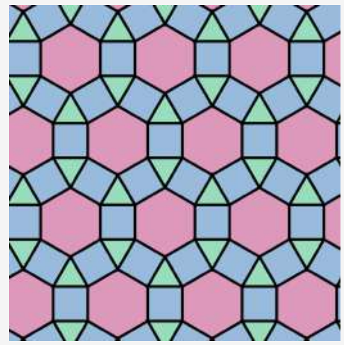
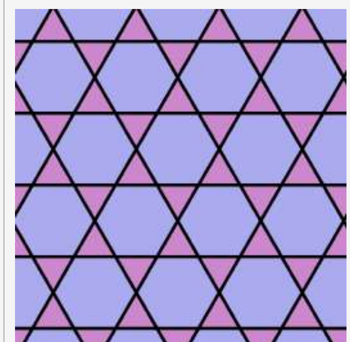
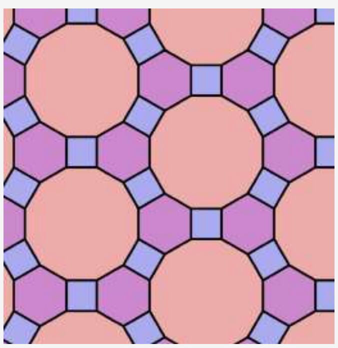
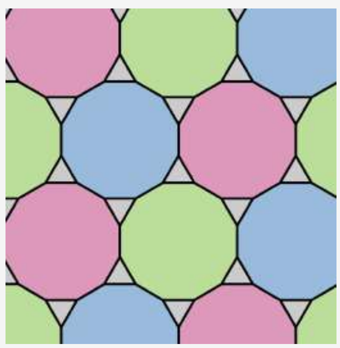
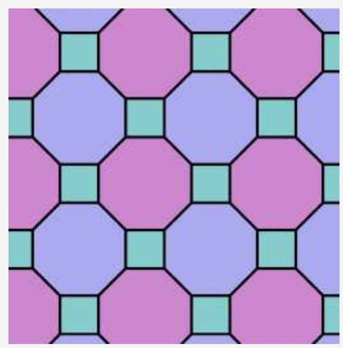
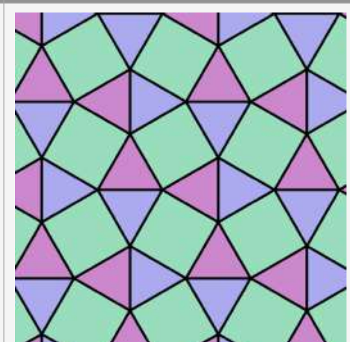
❻2 個正五邊形(內角 108°) + 1 個正十邊形(內角 144°)
➔$2\times108°+1\times144°=360°$

密鋪多邊形由單位圖形層層往外延伸擴張時，因此不管在哪一個頂點位置單位圖形組合的幾何特性都必須滿足密鋪 360° 的條件。

➔雖然 2 個正五邊形跟 1 個正十邊形頂點可密鋪成 360° ，但卻無法滿足繼續規則地往外密鋪形成多邊形，圖形如右。



只有正三角形、正方形、正六邊形、正八邊形、正十二邊形等 5 種正多邊形可由 2 種不同正多邊形相互搭配形成密鋪多邊形。而這五種正多邊形可以組成8種半正則鑲嵌圖:

(3,3,3,3,6), s{6,3} ——扭稜六邊形鑲嵌	(3,3,3,4,4), {3,6}:e ——異扭稜正方形鑲嵌	(3,4,6,4), $t_{0,2}\{6,3\}$ ——小斜方截半六邊形鑲嵌	(3,6,3,6), $t_{1}\{6,3\}$ ——截半六邊形鑲嵌
			
(4,6,12), $t_{0,1,2}\{6,3\}$ ——大斜方截半六邊形鑲嵌	(3,12,12), $t_{0,1}\{6,3\}$ ——截角六邊形鑲嵌	(4,8,8), $t_{0,1}\{4,4\}$ ——截角正方形鑲嵌	(3,3,4,3,4), s{4,4} ——扭稜正方形鑲嵌
			

綜合討論:

(1)以上八種組合中:正三邊形出現六次最多、正八邊形一次最少，故正三邊形最容易搭配組合形成半正則鑲嵌圖形；正八邊形最不容易搭配組合形成半正則鑲嵌圖形。

正n邊形	組合	合計
正 3 邊形	(3,3,3,3,6) (3,3,3,4,4) (3,4,6,4) (3,6,3,6) (3,12,12) (3,3,4,3,4)	6
正 4 邊形	(3,3,3,4,4) (3,4,6,4) (4,6,12) (4,8,8) (3,3,4,3,4)	5
正 6 邊形	(3,3,3,3,6) (3,4,6,4) (3,6,3,6) (4,6,12)	4

正n邊形	組合	合計
正 8 邊形	(4,8,8)	1
正 12 邊形	(4,6,12) (3,12,12)	2

⑵這兩組(3,3,3,4,4)、(3,3,4,3,4)就數值看似相似，但表列之後發現組合數字不會重覆，代表由組合數字形成的圖 案全然不同。

	類似組合
(3,3,3,4,4)	(3,3,4,4,3)、(3,4,4,3,3)、(4,4,3,3,3)、(4,3,3,3,4)
(3,3,4,3,4)	(4,3,4,3,3)、(3,4,3,3,4)、 (4,3,3,4,3)、 (3,4,3,4,3)

• 正則鑲嵌

在幾何學中，正鑲嵌圖是一種平面密鋪，是重複排列組合相同正多邊形，並讓圖形完全占滿整塊平面，而且沒有空隙或重疊。

有時會稱正鑲嵌圖為為**柏拉圖鑲嵌**（Platonic tilings）。

一個正則鑲嵌是由一群相同(互相全等)之正多邊形所拼成之形態，在拼貼時同時要求:

■頂點碰頂點

■邊與邊密合

■而且都可以往外繼續拼滿整個平面

因此每個正n多邊形內角之總和為 360°

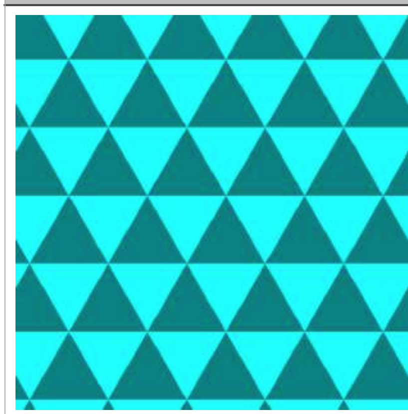
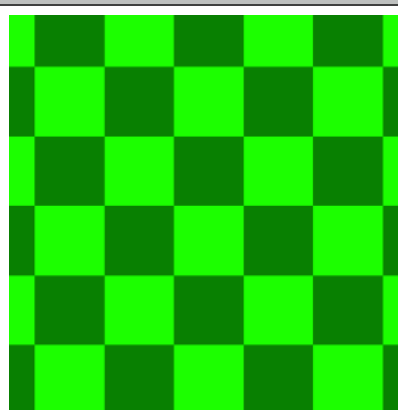
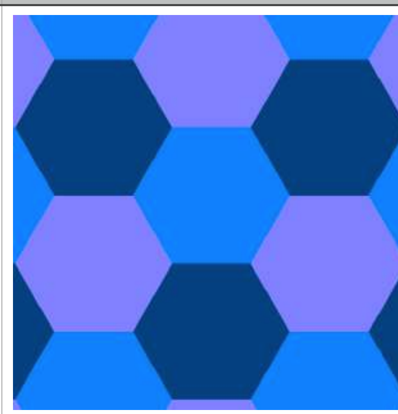
➔正n多邊形內角為 $\pi-2\pi/n = (n-2)\pi/n$

➔m個正n多邊形內角和為$m\pi(n-2)/n = 2\pi$, m為整數

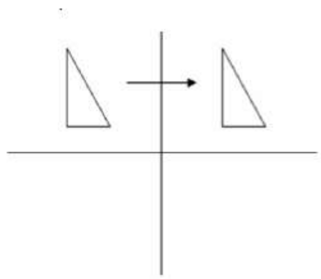
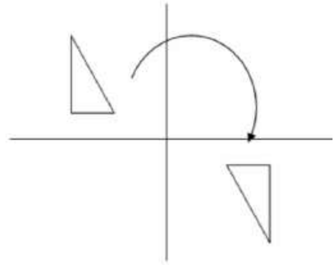
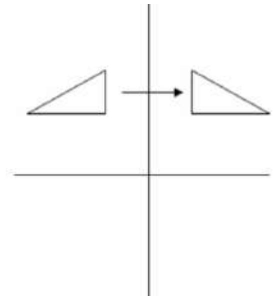
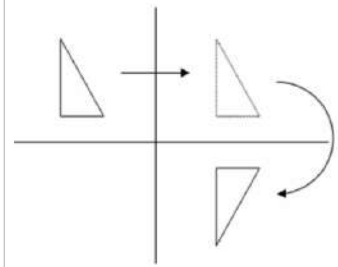
窮究計算後，得以下試算表:

正多邊形的邊數 n	內角	正多邊形的個數 m
3	60	6
4	90	4
5	108	3.33333
6	120	3
7	128 4/7	2.8
8	135	2.667
9	140	2.571
10	144	2.5
11	150	2.4
…	…	…
n	(n-2)π/n	2n/(n-2)

可以發現只有三組解，即六個正三角形或四個正四方形或三個正六邊形圍繞。

正三角形鑲嵌 (3,3,3,3,3,3), {3,6}	正四方形鑲嵌 (4,4,4,4), {4,4}	正六邊形鑲嵌 (6,6,6), {6,3}
		

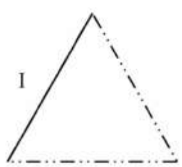
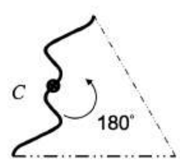
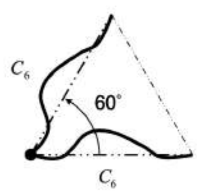
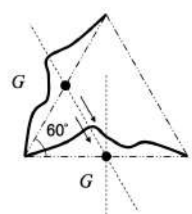
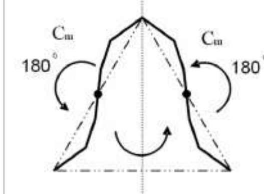
接下來，我們探討在二維重複連續圖樣中，所有等量變換(Isometry)：

平移(Transformation)	旋轉(Rotation)	鏡射(Reflection)	滑動鏡射(Glide-reflection)
			

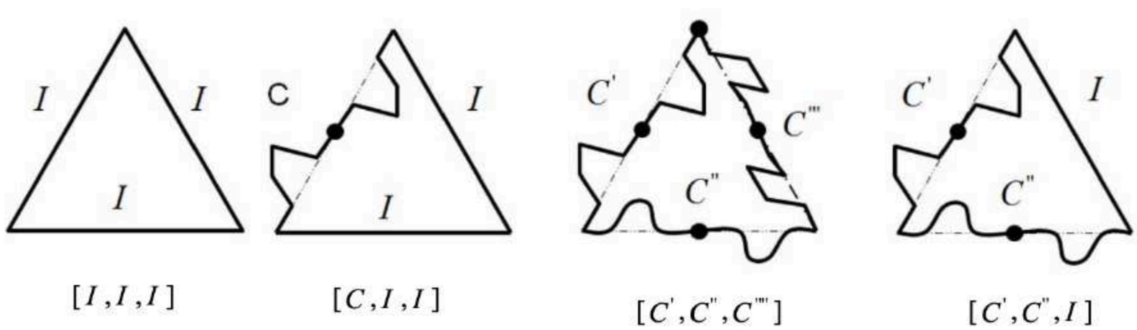
以下主要介紹正三角形鑲嵌和正四邊形鑲嵌，正六邊形鑲嵌因版幅過大，僅介紹結論

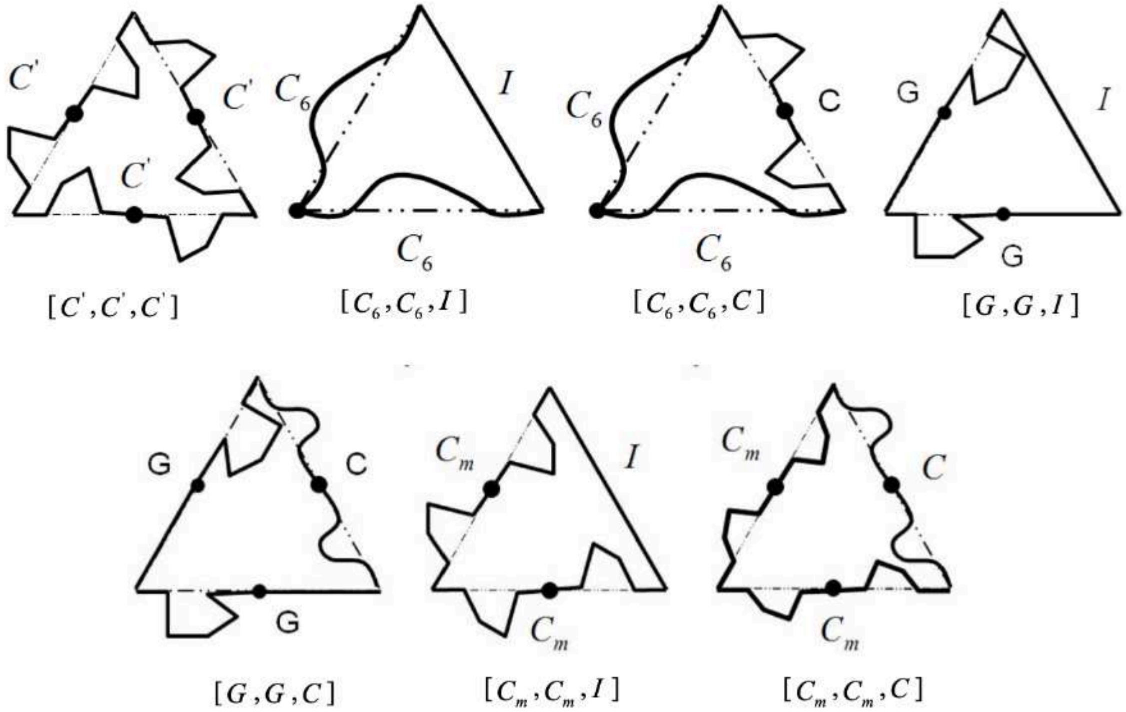
1. 正三角形鑲嵌

1st. 歸納出正三角形邊之變化及運算符號

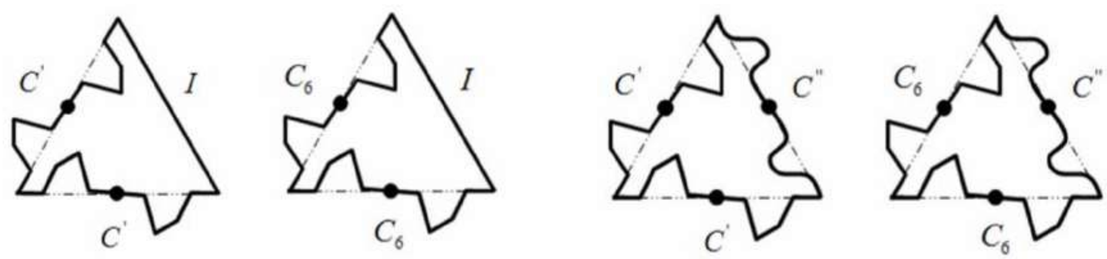
I: (Identity) 不做任何變化	C: (Center point rotation) 以邊中點為旋轉中心旋180°	C_6: (Corner rotation 60°) 以一端為旋轉中心旋轉 60°	G: (Glide reflection, adjacent sides) 以一端為旋轉中心旋轉後再鏡射	C_m:(Center point rotation, mirror) 作 C 作用後 以第二邊中垂線當鏡射軸鏡射到第三邊
				

2nd. 由以上五種運算符號，可以得到13種密鋪磁磚的組合，但有兩種性質重複，因此找出11個所有可以形成密鋪磁磚的組合

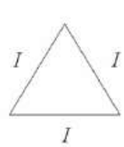
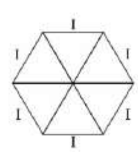
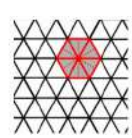


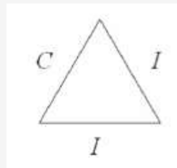
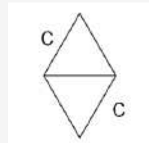
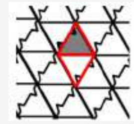
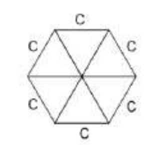
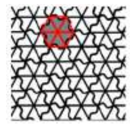
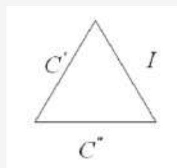
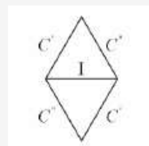
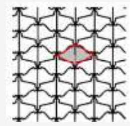
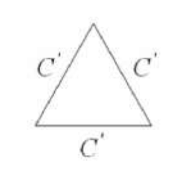
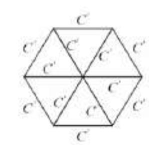
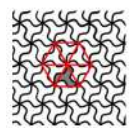
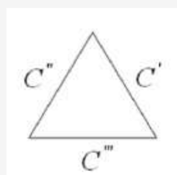
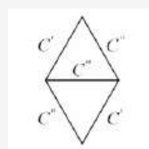
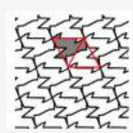
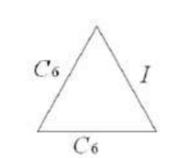
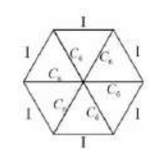
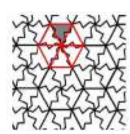
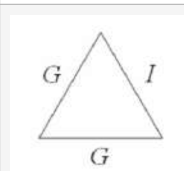
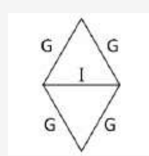
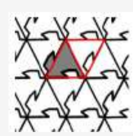
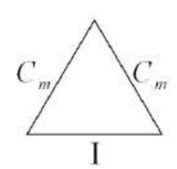
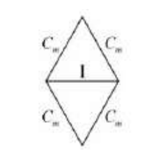
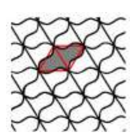


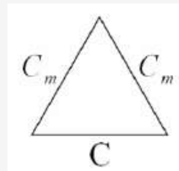
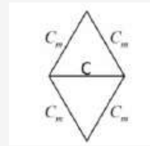
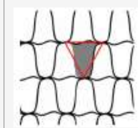
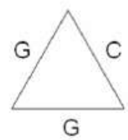
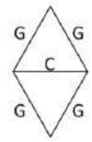
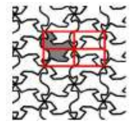
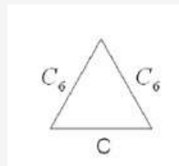
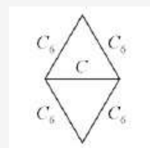
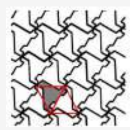
在上述圖例中, 發現[C′　, C′　,C″　]和[C_6,C_6,C]，[C_6,C_6 , I]和[C′　,C′　,I]有重複之部分, 因為C是C_6的一種, 因此包含在大範圍中



3rd.總結

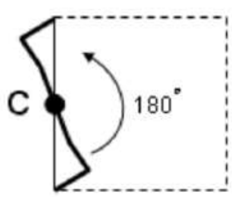
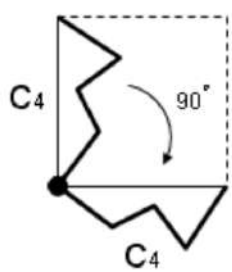
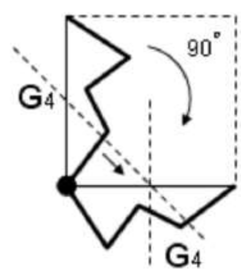
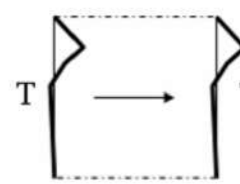
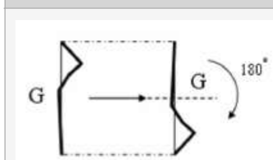
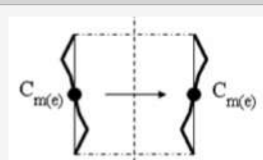
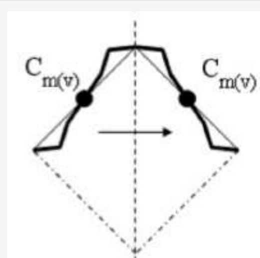
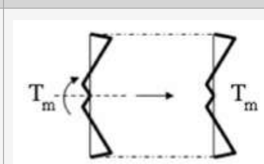
	基本運算	密鋪情況	例圖
不做變化			

	基本運算	密鋪情況	例圖
只考慮C			
			
			
			
			
只考慮C_6			
只考慮G			
只考慮C_m			

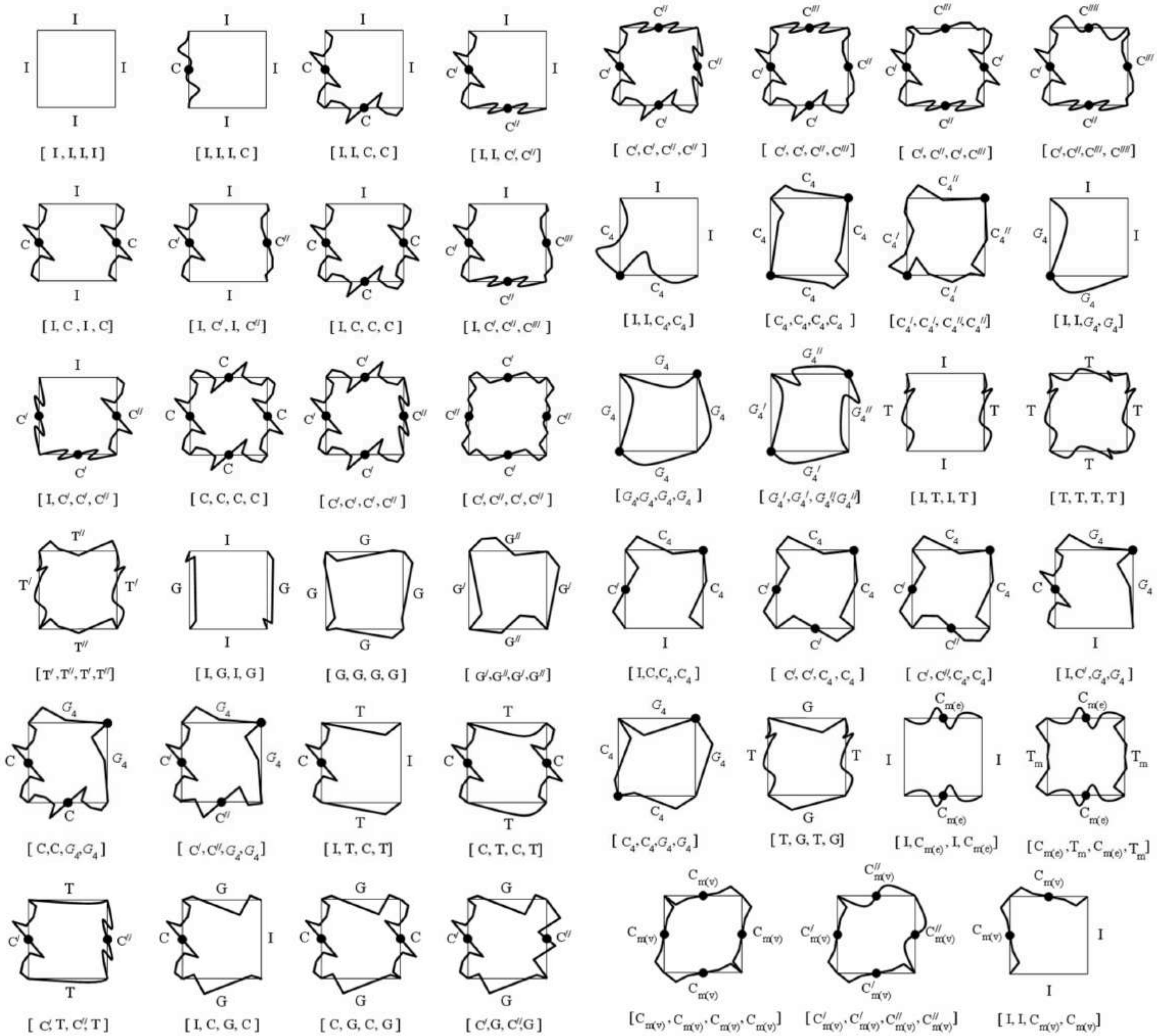
	基本運算	密鋪情況	例圖
考慮C和C_m			
考慮C和G			
考慮C和C_6			

2. 正四方形鑲嵌

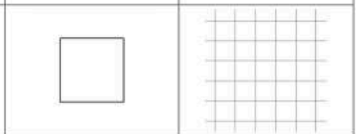
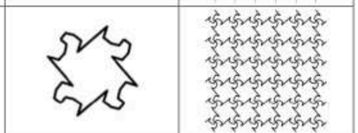
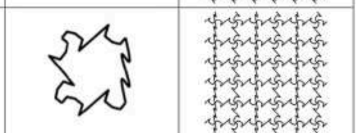
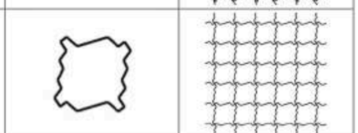
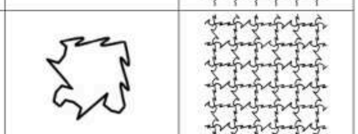
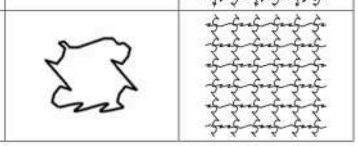
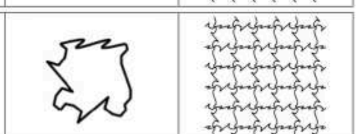
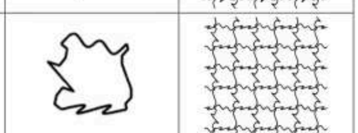
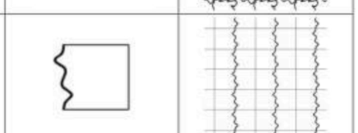
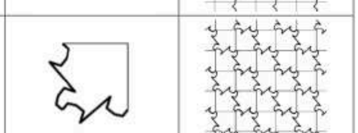
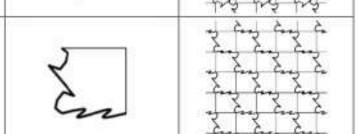
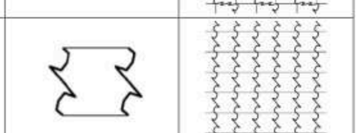
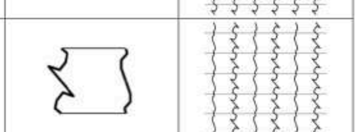
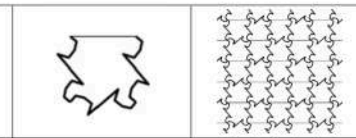
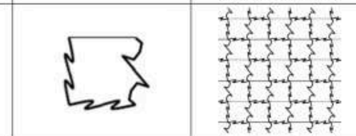
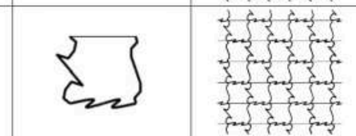
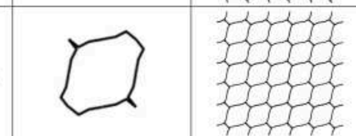
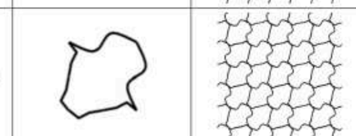
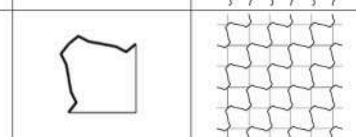
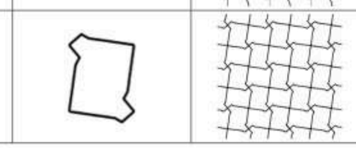
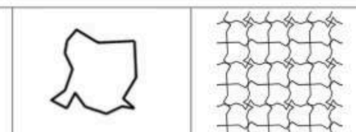
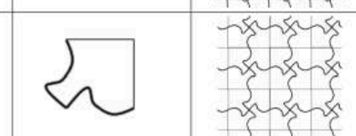
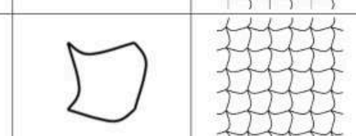
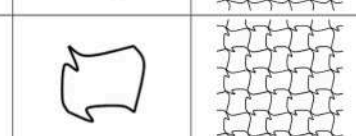
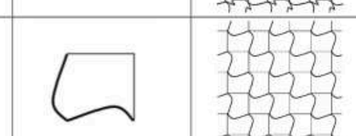
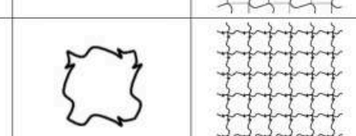
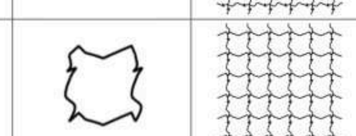
1st. 歸納出正四方形邊之變化及運算符號

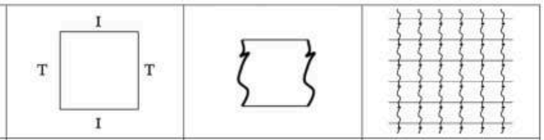
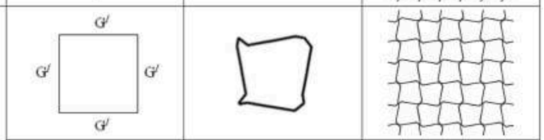
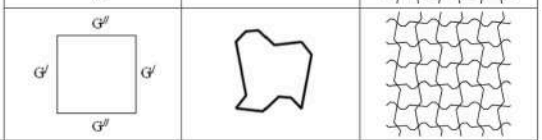
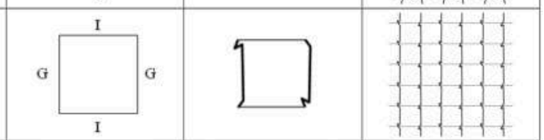
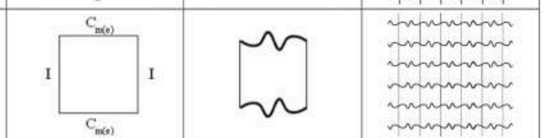
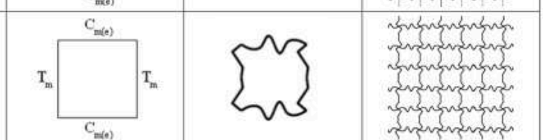
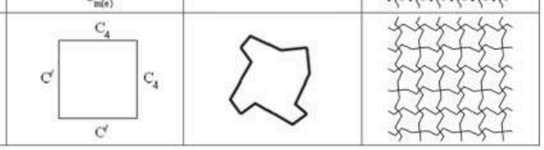
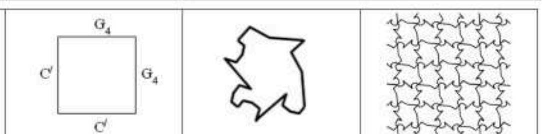
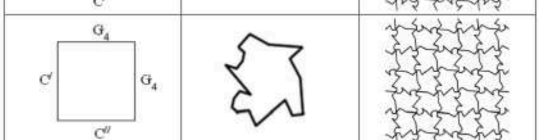
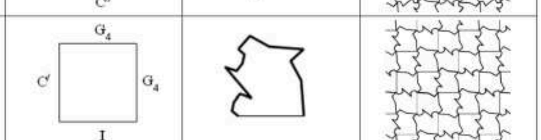
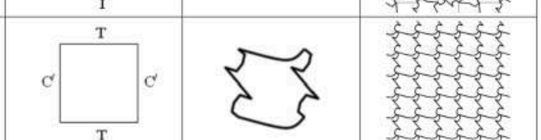
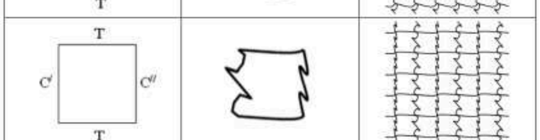
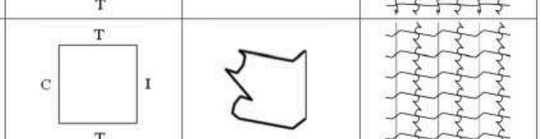
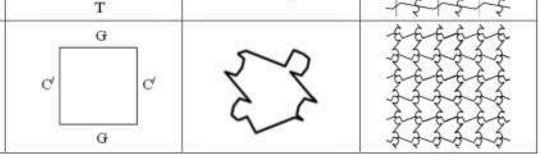
I: (Identity) **不做任何變化**	**C: (Center point rotation)** **以邊中點為旋轉中心旋180°**	**C_4: (Corner rotation 90°)** **以一端為旋轉中心旋轉 90°**	**G_4: (Glide reflection, adjacent sides)** **以一端為旋轉中心旋轉後再鏡射**	**T: (Translation)** **平移**
				
G: (Glide reflection) **平移後鏡射**	**$C_{m(e)}$: (Center point rotation, mirror by edge)** **經 C 作用後，以一組對邊中 垂線為鏡射軸做鏡射**	**$C_{m(v)}$: (Center point rotation, mirror by vertex)** **經 C 作用後，以一組對角線為鏡射軸做鏡射**	**T_m: (Translation, mirror)** **以邊的中垂線為對稱軸做鏡射後再做平移**	
				

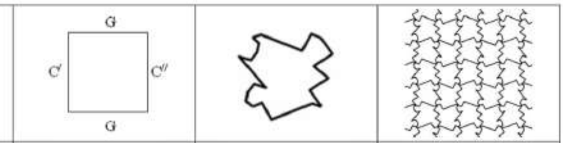
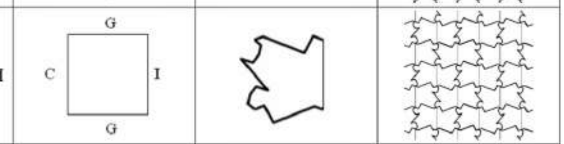
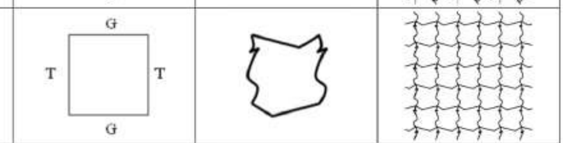
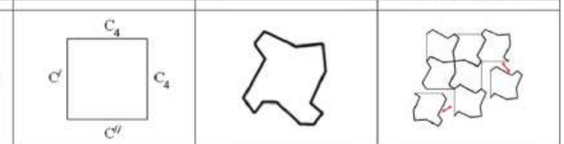
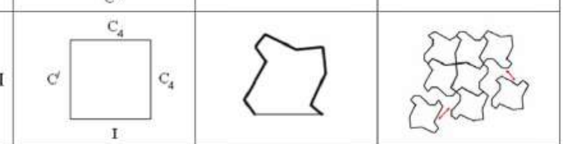
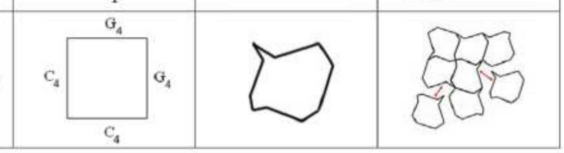
2nd. 由以上九種運算符號，可以得到47種密鋪磁磚的組合



3rd.總結

	符號表示	磁磚例圖	密鋪
只討論 I	I I I I		
只討論 C	C' C' C' C'		
	C' C' C'' C'		
	C' C'' C'' C'		
	C'' C' C'' C'		
	C''' C' C' C''		
	C'' C' C''' C'		
	C'''' C' C''' C''		
只討論 C 和 I	I C I I		
	I C' I C'		
	I C' I C''		
	I C' C' I		
	I C' C'' I		
	I C' C' C'		
	I C' C'' C'		
	I C' C''' C''		
只討論 $C_{m(v)}$	$C'_{m(v)}$ $C'_{m(v)}$ $C'_{m(v)}$ $C'_{m(v)}$		
	$C''_{m(v)}$ $C'_{m(v)}$ $C''_{m(v)}$ $C'_{m(v)}$		
只討論 $C_{m(v)}$ 和 I	$C_{m(v)}$ $C_{m(v)}$ I I		
只討論 C_4	C'_4 C'_4 C'_4 C'_4		
	C''_4 C'_4 C''_4 C'_4		
只討論 C_4 和 I	I C_4 I C_4		
只討論 G_4	G'_4 G'_4 G'_4 G'_4		
	G''_4 G'_4 G''_4 G'_4		
只討論 G_4 和 I	I G_4 I G_4		
只討論 T	T' T' T' T'		
	T'' T' T' T''		

只討論 T 和 I	
只討論 G	
	
只討論 G 和 I	
只討論 $C_{m(e)}$ 和 I	
只討論 $C_{m(e)}$ 和 T_m	
只討論 C 和 C_4	
只討論 C 和 G_4	
	
只討論 C、G_4 和 I	
只討論 C 和 T	
	
只討論 C、T 和 I	
只討論 C 和 G	

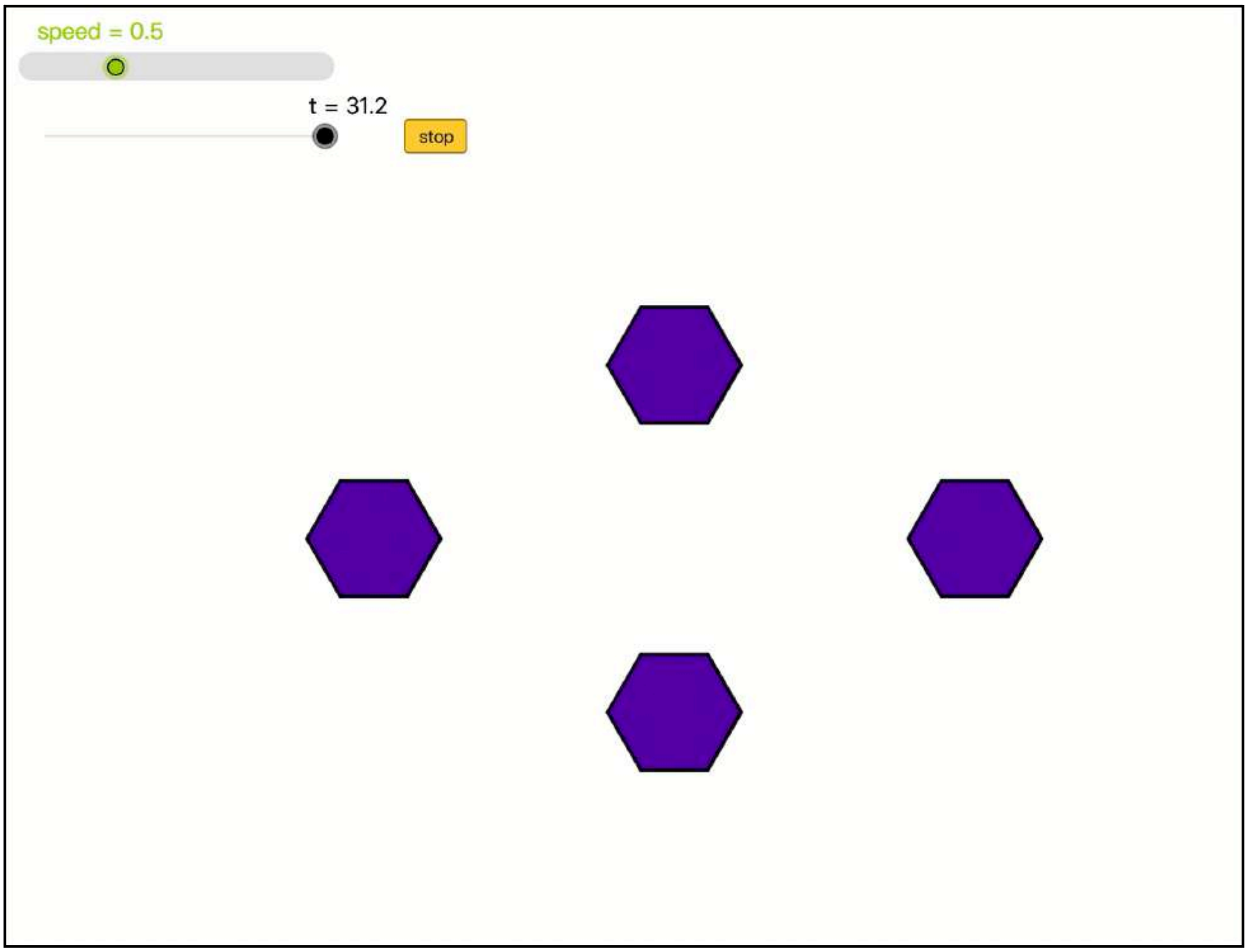
	
只討論 C、G 和 I	
只討論 T 和 G	
只討論 C 和 C_4	
只討論 C、C_4 和 I	
只討論 C_4 和 G_4	

結論二：在 47 種設計方法中，共 44 種設計方法可以無限密鋪，而剩餘的三種則無法密鋪，分別為[C', C'', C_4, C_4]、[I, C, C_4, C_4]及[C_4, C_4, G_4, G_4]。

3. 正六邊形鑲嵌:

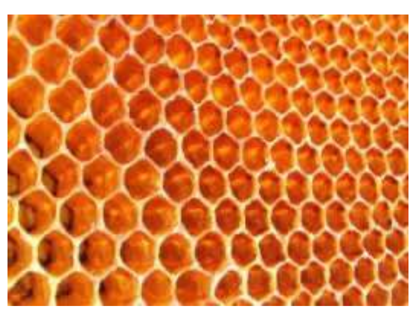
六邊形磁磚，一共只有 20 種對稱拼貼圖結構。

4.**創造 by GeoGebra:**



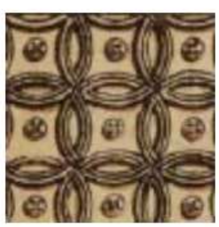
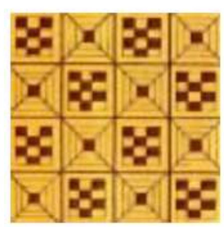
5.**應用:**

- **蜂窩**



- **阿姆斯特丹機場**
- **阿布拉罕宮**

- **各種不同民族的鑲嵌圖案**

埃及	拜占庭	中國	印度	波斯
				
				

6.參考資料:

中小學科學展覽會

1.“繪身繪影—正三角形磁磚設計方法與碎形密鋪之研究”, 第47屆, 2007

(取用部分:正三角形鑲嵌之所有變化組合)

2.“從平面到空間- 廣義四邊形磁磚的設計法與應用“, 第50屆 , 2010

(取用部分:正四方形鑲嵌之所有變化組合)

3. “站在 Escher 的肩膀上——平面及空間中的密鋪圖形設計“, 第50屆, 2010

(取用部分:所有等量變化)

4. “M.C-Escher 極限圖的結構解析與實務研究“, 第60屆, 2020

(取用部分:)

5.”圖形密碼ー密鋪多邊形完全漫遊之研究”, 第62屆, 2022

(取用部分:半正則鑲嵌組合)

臺灣國際科學展覽會

1.”Escher狂想曲” , 2013

(取用部分:正六邊形鑲嵌之變化組合)

2.”艾雪三角形磁磚對稱密鋪圖研究”,2024

(取用部分:正三角形鑲嵌之所有變化組合)

論文

1.”群論應用於艾雪鑲嵌藝術之對稱構成研究“, 中原大學商業設計學系碩士學位論文, 張瑜軒, 2002

(取用部分:正則鑲嵌角度組合, 古代民族之鑲嵌圖案)

維基百科

1. 施萊夫利符號 (取用部分:施萊夫利符號解釋, 各圖形之施萊夫利符號)

2. 半正鑲嵌圖 (取用部分:各半正則鑲嵌之譯名)

圖源

1. escher官網
2. **維基百科: 正多邊形鑲嵌, 半正鑲嵌圖**