期末報告

課程名稱:數學思維與解題

報告題目:機率與統計

組別:第9組

學生姓名:

411231128戴傳恩

411231143林俊宏

411231107王怡文

411031140林咏勳

一、報告簡介

你有沒有想過，做選擇題或參加抽獎時，其實每個決定背後都藏著一點數學？本報告會用一些簡單的例子，像是大家常聽過的「蒙提霍爾問題」，來介紹機率和統計的基本概念。我們會聊聊像是「改變選擇會不會比較容易中獎？」這類問題，再進一步看看這些機率知識在生活或工作中有哪些實際應用，像是廣告投放、行銷策略等。希望透過這份報告，讓大家了解其實機率和統計沒那麼難，也真的能幫助我們做出更聰明的決定。

二、內容摘要

1. 蒙提霍爾問題

這個猜謎的情節是美國電視益智節目「讓我們做個交易吧!(Let's Make a Deal！)」，而主持人就是當時大名鼎鼎的蒙迪．霍爾(Monty Hall)，而以上的三門選擇問題又被稱為「蒙迪．霍爾悖論(Monty Hall problem)」。

假設你正在參加一個遊戲節目，你被要求在三扇門中選擇一扇：其中一扇後面有一輛車；其餘兩扇後面則是山羊。你選擇了一道門，假設是一號門，然後知道所有門後面有什麼的主持人，開啟了另兩扇中 其中一扇後面有山羊的門，假設是三號門。他然後問你：「你想選擇二號門嗎？」轉換你的選擇對你來說是一種優勢嗎？

想像有 100 扇門，你選一扇，主持人打開 98 扇空門，只剩你那扇和另一扇沒開。你會換嗎？

從貝式定律可以得到，換門的機率比較高！P(得獎 ｜ 換)=p(換了得獎)/p(換)，換門得獎的機率為一開始選到羊後來換到汽車=(2/3)*(1/2)=1/3，不管有沒有中有換門的機會為(1/3)*(1/2)+(2/3)*(1/2)=1/2，p(換了得獎)/p(換)=(1/3)/(1/2)=2/3，給個變化題，主持人想說不要對觀眾那麼好，在未被觀眾選中的N−1 道門中開啟K道後面有羊的門，總共有A輛車。那還要換嗎?如果換門後中獎了代表先選到羊再換成車，所以一開始選到的門一定要是羊，P(選到羊)=(N-1)/N在初選是羊的情況下，獎品一定藏在其他未開啟的門之中。這時候未被開啟的門總共有 N−1−K 扇門，車隨機分佈在這些門中，P(選到車)=A/(N-1-K)。P(選到羊)*P(選到車)=[(N-1)/N]*A/(N-1-K)，參賽者一開始選中的門是車且不換門的機率是1/N，P(換門得獎)-P(不換門得獎)=(A/N)*K/(N-K-1)其中N-K大於等於2，K大於等於0，A大於0。

可以得出換門得獎的機率一定大於不換門得獎，可以將這個理論應用，三個行銷平台做投放(如 Google Ads、Facebook Ads、TikTok)，初期你主力投在 Google Ads。後來數據顯示 Facebook 廣告表現明顯很差(被主持人「打開」)。這時若你選擇從 Google Ads 轉向 TikTok(也就是「換門」)，可能比持續砸錢在 Google Ads 更有效，尤其是初選平台時沒有充足數據。

2. **心理學與p-hacking**

題目

(1)在一項心理學實驗中，冥想訓練是否會影響人的10種不同認知能力(如記憶

力、反應力、反應速度等等)。研究者對同一組數據進行了10次獨立統計檢定，至少出現一次“型I誤差”的機率是多少?

(2)當虛無假設(H0)為真時，$p<0.05$的機率是5%。若某心理學論文報告$p=0.03$，作者宣稱“結果有95%信心正確”。這個說法有問題嗎?

(3)一項研究同時檢驗“憂鬱症”與五種生物標記的關聯性。若希望整體型一誤差控制在0.05內，使用Bonferroni校正後，每個檢驗的顯著水平應設為多少?

解答

(1)設H0:冥想對認知能力無效果vs.H1:冥想對認知能力有效果。

假設H0為真(若H1為真,需要考慮鑑定力1-beta，但這題只關注型一誤差的問題)在顯著水平=0.05的情況下。

顯著水平:P(拒絕H0|H0為真)=0.05沒有型一誤差的機率就是1-0.05=0.95，做了十次鑑定=0.95^10至少一次型一誤差:1-(0.95)^10=0.4013明顯發生第一型誤差的機率非常高。

(2)不行❌

p值的精確定義:在H0為真的假設下，觀察到的當前數據的機率。p值無法直接回答“假設為真的機率”。因為我們缺乏H0本身為真的基礎機率，如果天氣預報說今天會下雨，但是實際沒下的錯誤警報率。

假設p=0.03=若H0為真，會有3%的機率看到這個錯誤。但是假如今天下雨了，不能反推出天氣預報的準確率有97%。

(3)為什麼需要Bonferroni?做越多次鑑定後出現型一誤差的機率會越大。這題的誤差機率是1-(0.95)^5=0.226(遠大於0.05)原理:將顯著水平平均分給所有檢驗，確保“整體”錯誤率小於等於顯著水平。

公式:顯著水準(單次)=顯著水準(整體)/檢驗次數.0.05/5=0.01

優點:簡單嚴格，控制整體錯誤率

缺點:過於保守(可能漏掉真是效應)校正後只有p<0.01的結果才算顯著，降低型一誤差風險。

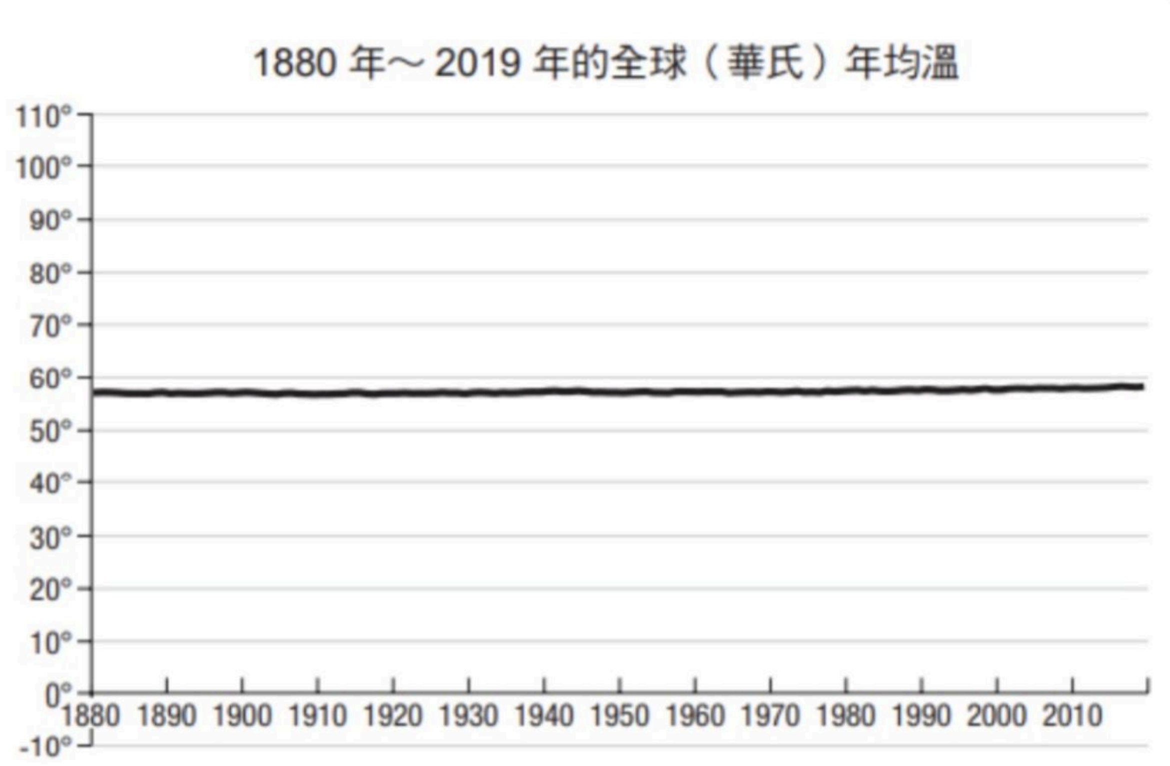
3. 統計圖表的誤導

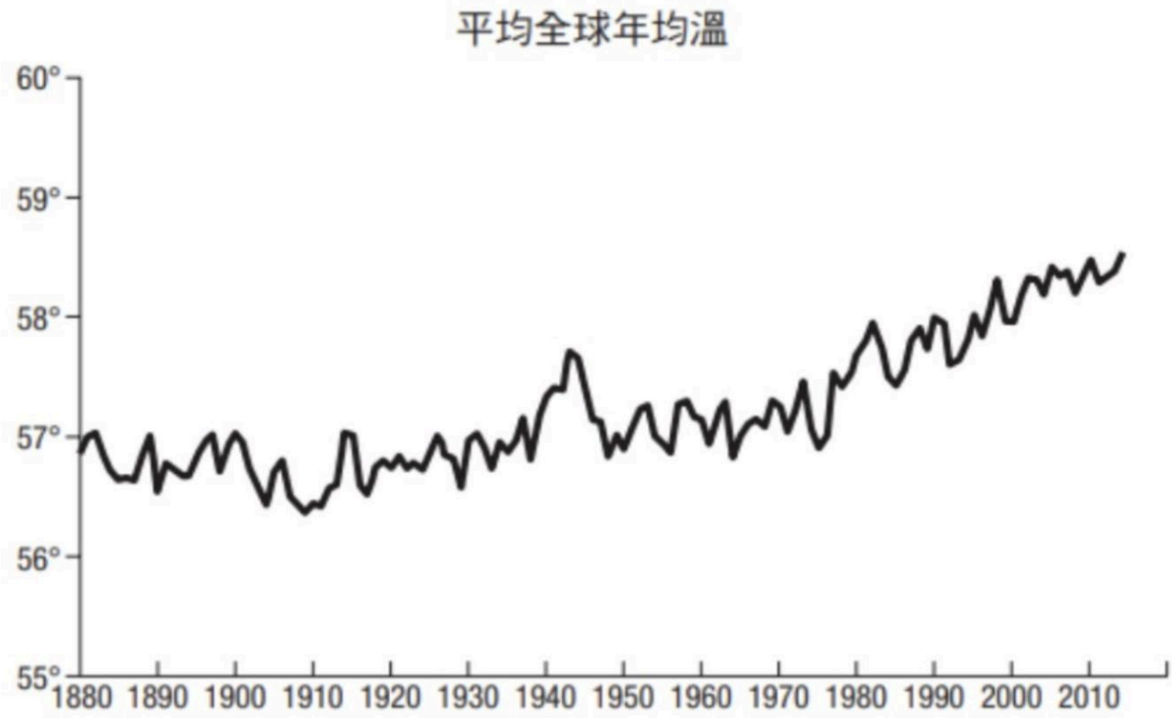
(1)引言**:**當我們在日常生活中接觸到數據時，統計圖表常被視為一種簡潔而有力的溝通工具。無論是新聞報導、企業簡報還是社群媒體貼文，圖表往往能迅速傳

達趨勢、比例與差異。然而，這些圖表若經過不當設計，或刻意操作視覺元素，極容易產生誤導效果，使觀者對實際情況產生錯誤理解。透過分析常見的誤導手法，我們能培養辨識圖表陷阱的能力，進而成為更具判斷力的數據解讀者。

(2)例子**:**

全球暖化圖表

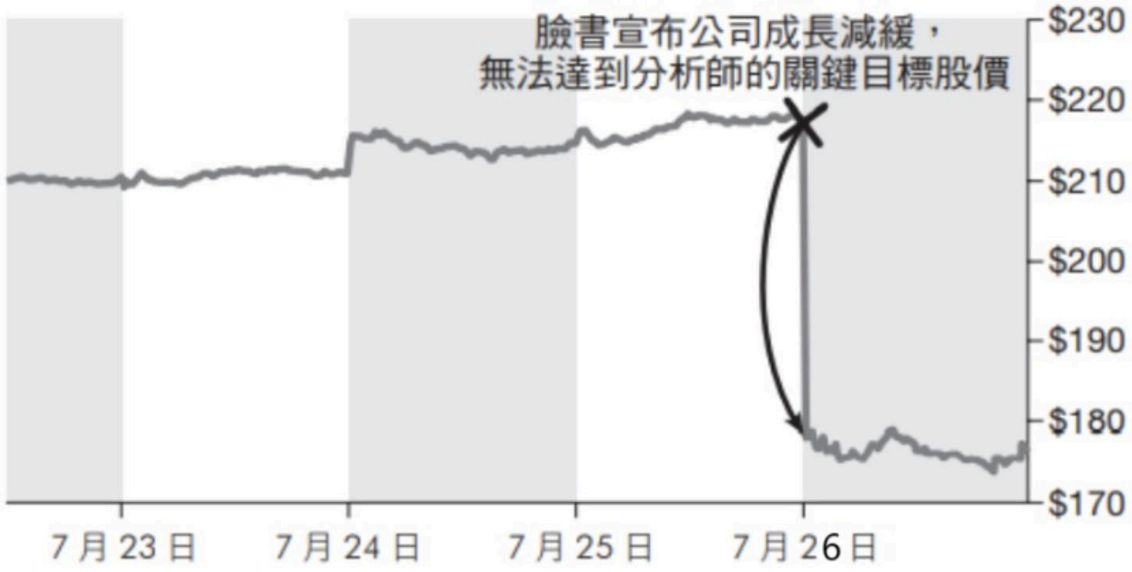




資料來源：美國太空總署（NASA）／哥達德太空研究院（GISS）

以上兩張圖表顯示的皆為西元1880~2019年之間，全球溫度的變化，由第一張圖表，我們可能會覺得在這100多年以來，全球的溫度變化並不大，進而誤導我們感覺全球暖化的現象其實並不嚴重。但事實上由第二張圖表，我們就可以看到，其實在這段時間以來全球的年均溫已經上升了將近2°，所以全球暖化的現象是存在的。而造成這樣的誤解是因為Y軸的溫度間距，第一張圖以每10°為一個間距，而第二章圖表則是1°，所以才會造成我們對於事實的誤解。

FB股價變化圖



2018年7月，臉書公布了一份季財報造成股價大跌。有一家媒體《Business Insider》的頭條這麼說：「臉書財損，1200億（美元）市值蒸發：美國股市有史以來的最大股災」。以上附上(第一張圖表)臉書4天內的股價變化圖。
但其實當我們將圖表改採橫跨5年而不是4天的圖之後(第二章圖表)，我們就會看到與臉書股價大跌的說法非常不一樣的事情，同時也會看到先前股價大跌後便快速反升的狀況。這就是操弄X軸，所造成的誤導。

民調圖表-統計圖表的刻度秘密

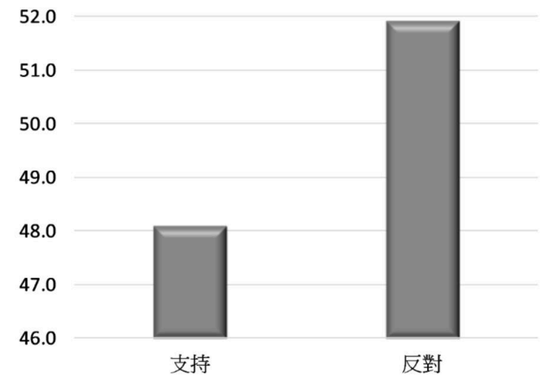


圖 1

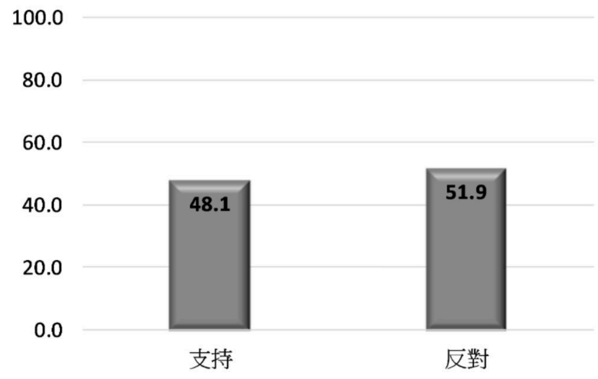


圖 2

相同的統計數據，在相同的圖表類型上，只要利用不同的刻度呈現，就容易讓讀者產生很不同的視覺感受。圖1及圖2是民意調查中，民眾對某一項重要議題持支持或反對的結果呈現，兩圖呈現的數據完全相同，但從長條圖差距的呈現結果來看，會令人有相當巨大的視覺差異，感覺圖1差異很大，圖2則是相差無幾。但之所以如此，主要是兩圖在Y軸上的刻度單位的呈現方式不一樣所致，如果讀者沒有仔細觀察，僅憑視覺上的直覺，很容易得到錯誤的認知。

民調圖表-資料歸類方式的影響

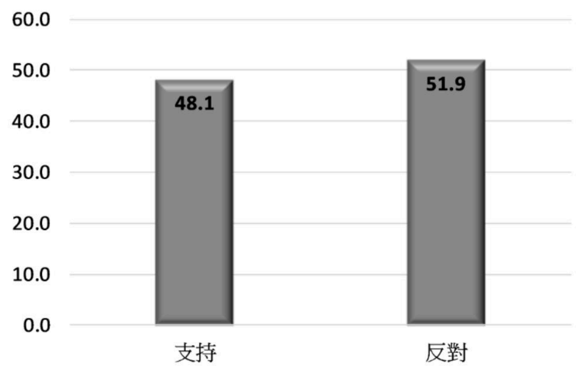


圖 3

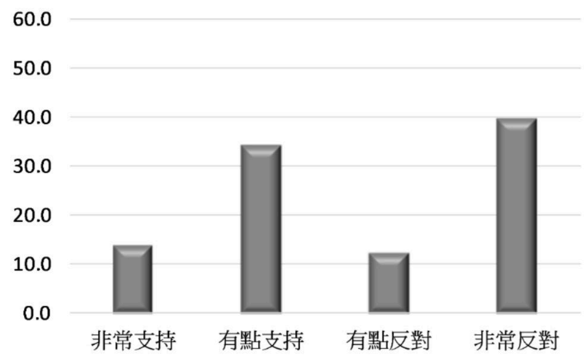


圖 4

民意調查完成後，對於變數的資料處理方式將會直接影響後續資料的呈現結果。其中，最常見的資料處理即是將變數的若干選項進行合併，以簡化圖表呈現的態樣，但如此一來即可能減損對該變數所能提供的相關資訊，致使讀者誤解整體民意的走向。以圖3及圖4為例，從量而言，雖然民眾支持與反對該議題的比例相當，反對方(51.9%)僅略高於支持方(48.1%)不到4%，但如果將支持與反對雙邊的強弱態度呈現出來，從另外一個角度來看，很明顯的，反對方的態度比支持方的強硬很多。非常反對的比例約占40%，遠高於有點反對的12%；相反的，非常支持的比例約15%，遠不及有點支持的34%。在這種看似雙方勢均力敵的比例分布下，若面對實際的政策執行時，可能會遇到的阻力或助力就會有相當大的差異性。因此，如果只看圖3而缺漏圖4的資訊，我們的想法就會完全不一樣了。

4. 賭場與期望值(**Expected Value in Gambling**)

為什麼賭場永遠贏?**答案就在於「期望值(Expected Value, EV)」的概念。

幾乎每一種賭博遊戲,不管是輪盤、二十一點、百家樂、老虎機,規則設計上都讓賭場有一個小小的數學優勢。例如:

- 在美式輪盤中,有「0」和「00」,這讓莊家的勝率略高於玩家。
- 在百家樂中,莊家雖然勝率高,但若下注莊家贏會被抽5%佣金。
- 老虎機則透過機率控制,讓回報率低於100%,例如玩家每投100元,期望只能拿回90元。

這種設計讓即使短期內玩家贏錢,長期下來賭場總是穩賺。

ex:美式輪盤

玩法:猜數字/猜顏色/猜大小/猜奇偶

顏色:賠率1:1

奇偶:賠率1:1

大小:賠率1:1,開出數字為1~18or19~36

顏色:賠率1:1,紅色or黑色

奇偶:賠率1:1

Dozen Bet : 賠率1:1,1~12or13~24or25~36

Column Bet : 賠率1:2, (1/4/7/10…)(3/6/9/12/…)

輪盤模擬:https://www.roulettesimulator.net/zh/

三、結論與建議

透過這次的報告所探討的模型與應用案例, 我們可以得出以下結論:

- 透過這次報告中介紹的機率模型和案例, 我們可以發現, 很多看起來是「運氣」的事情, 其實背後都有數學的邏輯。像是「蒙提霍爾問題」就告訴我們, 有時候直覺不一定可靠, 反而是用數學計算更能幫我們做出好選擇。
- 在日常生活或工作中, 不論是抽獎、中獎機率, 還是行銷上的受眾分析, 其實都離不開機率和統計這兩個工具。只要掌握基本的概念, 就能做出更聰明、更有依據的決策。
- 建議大家平常可以多留意生活中的小機率問題, 試著用統計的角度去分析, 這不但能幫助我們更了解事物的背後邏輯, 也能提升解決問題的能力。
- 當我們解讀統計圖表時, 一定要保持批判思維。圖表雖然是視覺化資料的有效工具, 但也可能透過不當的比例、範圍設定、樣本選擇或省略關鍵資訊, 誤導我們對於事實的判斷。誤導性的圖表不僅扭曲事實, 也可能影響公眾決策與輿論走向。因此, 理解圖表背後的資料來源與設計目的, 是防止被數據操弄的關鍵。

四、參考資料

1. 三門問題(Monty Hall Problem)https://peienwu.com/monty-hall
2. 換？還是不換

   https://w3.khvs.tc.edu.tw/ischool/widget/main_menu/show.php?id=1802
3. 維基百科(蒙提霍尔问题)

   https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E8%92%99%E6%8F%90%E9%9C%8D%E7%88%BE%E5%95%8F%E9%A1%8C
4. 資料正確無誤, 卻很混淆視聽！2個「圖表誤導」經典案例

   https://www.businessweekly.com.tw/careers/blog/3009877

5. 民意調查的圖表解讀及可能的陷阱

   https://mlearn.moe.gov.tw/TopicArticle/PartData?key=11108

6. 贏不了的賭場公式“凱利公式”

   https://www.iqvalue.com/tips/article?id=449&tipsCategoryId=8

7. Deepseek AIhttps://www.deepseek.com/
8. 維基百科(p-hack)https://zh-yue.wikipedia.org/wiki/P-hack

五、小組分工

戴傳恩:找資料、做報告、口頭報告

林俊宏:找資料、做報告、口頭報告

王怡文:找資料、做報告、口頭報告

林永勳:找資料、做報告、口頭報告