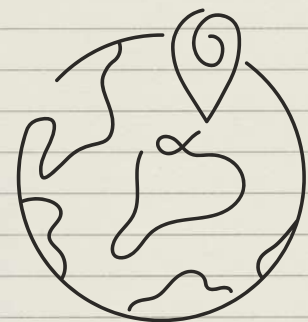


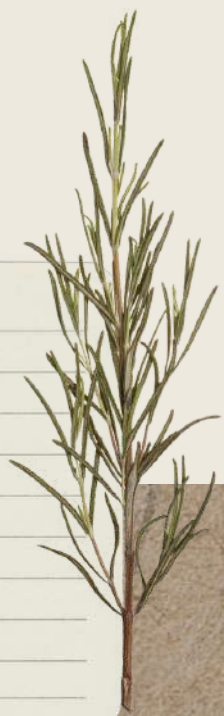
# 2021 Greece JBMO TST

題目分析 第3組  
蔡秉哲、蕭振呈、潘弈  
丞、曾泓儒、郭育霖





# 題目翻譯





# 題目一

If positive reals  $x, y$  are such that  $2(x+y)=1+xy$ , find the minimum value of expression  $A=x+1/x+y+1/y$





# 題目一翻譯

如果正實數 $x$ 和 $y$ 使 $2(x+y)=1+xy$ ，試求  
 $A=x+1/x+y+1/y$ 的最小值





## 題目二

Anna and Basilis play a game writing numbers on a board as follows: The two players play in turns and if in the board is written the positive integer  $n$ , the player whose turn is chooses a prime divisor  $p$  of  $n$  and writes the numbers  $n+p$ .





## 題目二

In the board, is written at the start number 2 and Anna plays first. The game is won by whom who shall be first able to write a number bigger or equal to 31. Find who player has a winning strategy, that is who may writing the appropriate numbers may win the game no matter how the other player plays.





## 題目二翻譯

Anna和Basilis玩一個填數字遊戲，規則如下：兩位玩家輪流寫數字，當數字為 $n$ 時，該輪玩家選一個 $n$ 的質因數 $p$ 並填上 $n+p$ 。起始數字為2且Anna為先手，誰可以先寫出大於等於31的數則贏得遊戲。試找出誰有必贏策略





## 題目三

Determine whether exists positive integer  $n$  such that  $A=8^n+47$  is prime





# 題目三翻譯

試判斷是否存在正整數 $n$ 使得數字  
 $A=8^n+47$ 是質數





## 題目四

Given a triangle  $ABC$  with  $AB < BC < AC$  inscribed in circle  $(c)$ .  
The circle  $c(A, AB)$  (with center  $A$  and radius  $AB$ ) intersects the line  $BC$  at point  $D$  and the  $(c)$  at point  $H$ .  
The circle  $c(A, AC)$  (with center  $A$  and radius  $AC$ ) intersects the line  $BC$  at point  $Z$  and the  $(c)$  at point  $E$ .





## 題目四

Lines  $ZH$  and  $ED$  intersect at point  $T$ .  
Prove that the circumscribed circles  
of triangles  $TDZ$  and  $TEH$  are equal.





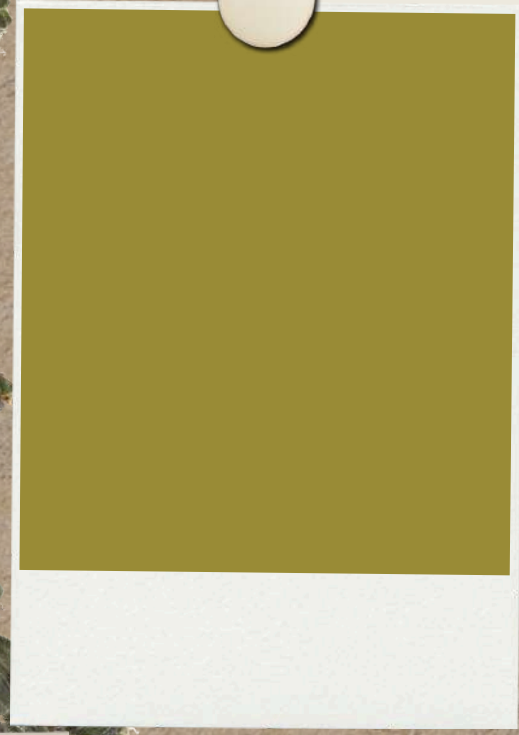
## 題目四翻譯

給一個三角形 $ABC$ ，其三邊 $AB < BC < AC$ 形成一個內切圓 $c$ ，以 $A$ 為圓心， $AB$ 為半徑的圓交 $BC$ 於 $D$ 點且交圓 $c$ 於 $H$ 點；以 $A$ 為圓心， $AC$ 為半徑的圓交 $BC$ 於 $Z$ 點且交圓 $c$ 於 $E$ 點。線段 $ZH$ 和 $ED$ 交於 $T$ 點。試證明三角形 $TDZ$ 和 $TEH$ 所形成的外接圓相等





# 題目解析





### 第三題題目及翻譯

Determine whether exists positive integer  $n$  such that  $A=8^n+47$  is prime

試判斷是否存在正整數 $n$ 使得數字  
 $A=8^n+47$ 是質數





## 第三題題目解析

先從數字小的觀察

$$n=1 \quad A=55=5 \times 11$$

$$n=2 \quad A=111=3 \times 37$$

$$n=3 \quad A=559=13 \times 43$$





## 第三題題目解析

用mod5去看

$$A \equiv 3^{n+2}$$

$$n=4k+1 \quad A \equiv 0$$

$$n=4k+2 \quad A \equiv 1$$

$$n=4k+3 \quad A \equiv 4$$

$$n=4k+4 \quad A \equiv 3$$





## 第三題題目解析

用mod3去看

$$A \equiv 2^{n+2}$$

$$n=2k+1 \quad A \equiv 1$$

$$n=2k+2 \quad A \equiv 0$$





## 第三題題目解析

用mod13去看

$$A \equiv 8^n + 8$$

$$n=4k+1 \quad A \equiv 3$$

$$n=4k+2 \quad A \equiv 7$$

$$n=4k+3 \quad A \equiv 0$$

$$n=4k+4 \quad A \equiv 9$$





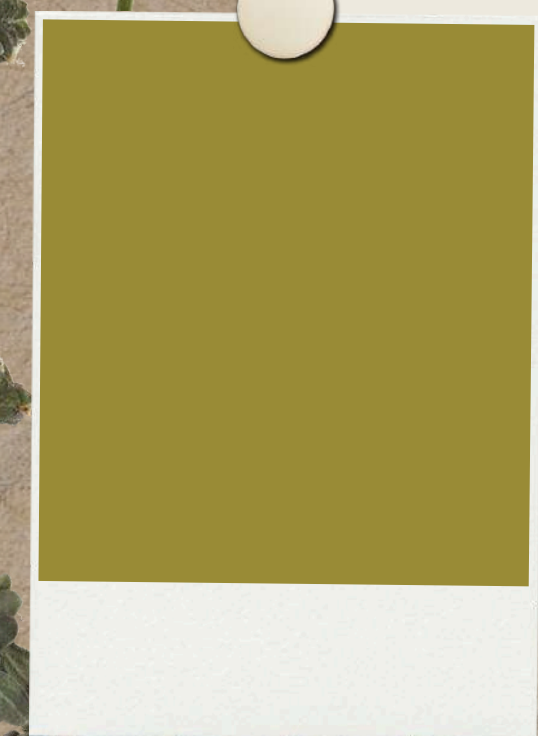
## 第三題題目解析

綜合上述三個可以得知A不是質數





# 類題





## 第三題類題

Determine whether exists positive integer  $n$  such that  $A=36^n+4780$  is prime

試判斷是否存在正整數 $n$ 使得數字  
 $A=36^n+4780$ 是質數





## 第三題類題解析

先從數字小的觀察

$$n=1 \quad A=4816=2^4 \times 7 \times 43$$

$$n=2 \quad A=6076=2^2 \times 7^2 \times 31$$

$$n=3 \quad A=51436=2^2 \times 7 \times 11 \times 167$$





## 第三題類題解析

用mod2去看

$$A \equiv 0^n + 0 \equiv 0$$

用mod7去看

$$A \equiv 1^n + 6 \equiv 1 + 6 \equiv 7 \equiv 0$$





## 第三題類題解析

用mod11去看

$$A \equiv 3^n + 6$$

$$n=4k+1 \quad A \equiv 9$$

$$n=4k+2 \quad A \equiv 4$$

$$n=4k+3 \quad A \equiv 0$$

$$n=4k+4 \quad A \equiv 10$$





## 第三題類題解析

用mod13去看

$$A \equiv 8^n + 8$$

$$n=4k+1 \quad A \equiv 3$$

$$n=4k+2 \quad A \equiv 7$$

$$n=4k+3 \quad A \equiv 0$$

$$n=4k+4 \quad A \equiv 9$$





## 第三題類題解析

綜合上述四個可以得知A不是質數

