數學解題方法期中報告

AOPS ONLINE 2020（2）

組別第四組

成員

顏融勝
黃民智
葉家禎
鄭同恩
徐梓源

題目

設a，b，c為正實數，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$。證明:

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}+\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}+\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}\leq 2$$

等號何時成立?

步驟一

換元步驟

令$\frac{1}{a}=x$，$\frac{1}{b}=y$，$\frac{1}{c}=z$，已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$，則$x+y+z=3$。

對於$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$，將$a=\frac{1}{x}$，$b=\frac{1}{y}$代入：

先對$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$變形，$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}}$，通分得到$\frac{\frac{x+y}{xy}}{\frac{y^2+xy+x^2}{x^2y^2}}=\frac{xy(x+y)}{x^2+xy+y^2}$。

設a，b，c為正實數，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$。證明：

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}+\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}+\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}\leq 2$$

等號何時成立？

換元代入法

步驟2

利用均值不等式放縮

根據均值不等式$x^2+y^2+xy \geqslant 3xy$（因爲$x^2+y^2+xy=(x-y)^2+3xy \geqslant 3xy$，當且僅當$x=y$時等號成立）。

所以$\frac{xy(x+y)}{x^2+xy+y^2} \leqslant \frac{xy(x+y)}{3xy}=\frac{x+y}{3}$。

同理可得$\frac{b+c}{b^2+bc+c^2} \leqslant \frac{y+z}{3}$，$\frac{c+a}{c^2+ca+a^2} \leqslant \frac{z+x}{3}$。

設a，b，c為正實數，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$。證明：

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}+\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}+\frac{c+a}{c^2+ca+a^2} \leq 2$$

等號何時成立？

均值不等式

步驟三

求和並得出結論

則$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}+\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}+\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}\leqslant\frac{x+y}{3}+\frac{y+z}{3}+\frac{z+x}{3}$。

而$\frac{x+y}{3}+\frac{y+z}{3}+\frac{z+x}{3}=\frac{2(x+y+z)}{3}$，又因爲$x+y+z=3$，所以$\frac{2(x+y+z)}{3}=\frac{2\times3}{3}=2$。

設a，b，c為正實數，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$。證明:

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}+\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}+\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}\leq 2$$

等號何時成立?

步驟四

等號成立條件

當且僅當$x=y=z$時，上述所有不等式的等號同時成立。因爲$x=\frac{1}{a}$，$y=\frac{1}{b}$，$z=\frac{1}{c}$，所以當$a=b=c=1$時，原不等式$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}+\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}+\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}\leqslant 2$ 等號成立。

設a，b，c為正實數，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$。證明：

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}+\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}+\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}\leq 2$$

等號何時成立?

類似題目

1 **題目** 1：已知a，b為正實數，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，證明$\frac{a+b}{a^2+b^2}\leq 1$。

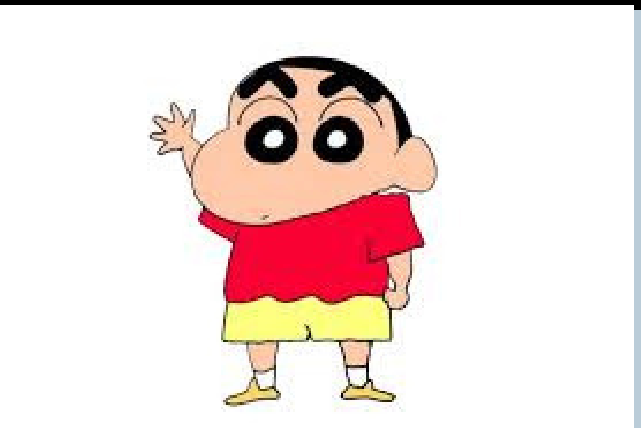
2 **題目** 2：設a，b，c為正實數，$a+b+c=3$，求證$\frac{1}{a^2+a}+\frac{1}{b^2+b}+\frac{1}{c^2+c}\geq\frac{3}{4}$。

3 **題目** 3：已知a，b為正實數，$ab=1$，證明$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}\leq 1$。

1. 設$\triangle ABC$滿足$AB > AC$。令D為AB邊上一點，使得$BD = AC$。考慮經過點D且在點A與邊AC相切的圓γ。考慮$\triangle ABC$的外接圓ω，它與圓γ相交於點A和E。證明點E是線段BC和AD的垂直平分線的交點。

2. 找出所有質數正整數對(a, b)，使得數$A = 3a^2b + 16ab^2$等於一個整數的平方。

3. 設A和B是$X = \{1, 2, \cdots, 8\}$的兩個非空子集合，滿足$A \cup B = X$且$A \cap B = \varnothing$。令P_A為A中所有元素的乘積，令P_B為B中所有元素的乘積。求$P_A + P_B$的最小可能值。



謝謝收看