數學解題方法
2018 Greece JBMO TST

第六組
組員:411131210羅紜萱
組員:411131212吳濟羽
組員:410931231陳敬棋
組員:411231242蕭應科

第一題

Let a, b, c, d be positive real numbers such that
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4.$
Prove that exist two of a, b, c, d with sum less or equal to $2.$

第一題翻譯

設 a, b, c, d 為正實数，

且滿足 $a^2+b^2+c^2=4$.

證明：在 a, b, c, d 中

存在兩個数，其和小於或

等於 2。

第一題講解

我們用反證法。

假設任意兩個數的和都大於 2，即：

$$a+b>2,\quad a+c>2,\quad a+d>2,\quad b+c>2,\quad b+d>2,\quad c+d>2$$

第一題講解

將上述六個不等式相加：

左邊總和為：

$$(a+b)+(a+c)+(a+d)+(b+c)+(b+d)+(c+d)=3(a+b+c+d)$$

右邊為：

$$6\times 2=12$$

所以有：

$$3(a+b+c+d)>12\Rightarrow a+b+c+d>4$$

第一題講解

但根據柯西不等式（Cauchy–Schwarz Inequality）可得：

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(1^2+1^2+1^2+1^2) \geq (a+b+c+d)^2 \Rightarrow 4\cdot 4 \geq (a+b+c+d)^2 \Rightarrow$$
$$16 \geq (a+b+c+d)^2 \Rightarrow a+b+c+d \leq 4$$

這與前面的結論 $a+b+c+d>4$ 矛盾，因此原假設錯誤。

所以必定**存在一對數，其和小於或等於 2**。

類似題

在一個正方形的花園裡，有四個種植區域，分別用來種植不同的花卉，這四個區域的面積分別為 a^2, b^2, c^2, d^2，總面積為 16 平方公尺。

問題：證明至少有兩個區域的邊長和小於或等於 4 公尺。

第二題

Let ABC be an acute triangle with $AB < AC < BC$, c it's circumscribed circle and D, E be the midpoints of AB, AC respectively. With diameters the sides AB, AC, we draw semicircles, outer of the triangle, which are intersected by line D at points M and N respectively. Lines MB and NC intersect the circumscribed circle at points T, S respectively. Lines MB and NC intersect at point H. Prove that:

a) point H lies on the circumcircle of triangle AMN

b) lines AH and TS are perpedicular and their intersection, let it be Z, is the circimcenter of triangle AMN

第二題翻譯

設 $\triangle ABC$ 為一銳角三角形，且 $AB < AC < BC$，c 是其外接圓，D, E 分別為 AB, AC 的中點。以 AB, AC 為直徑，在三角形外側畫半圓，這些半圓被直線 D 分別於點 M 和 N 相交。直線 MB 和 NC 分別在外接圓上與點 T, S 相交。直線 MB 和 NC 於點 H 相交。證明：

a) 點 H 在三角形 AMN 的外接圓上。

b) 直線 AH 和 TS 垂直，它們的交點 Z 是三角形 AMN 的外心。

第三題

12 friends play a tennis tournament, where each plays only one game with any of the other eleven. Winner gets one points. Loser getos zero points, and there is no draw. Final points of the participants are $B_1, B_2, ..., B_{12}$. Find the largest possible value of the sum $\Sigma_3 = B_1^3 + B_2^3 + ... + B_{12}^3$.

第三題翻譯

12個朋友參加一場網球錦標賽，每人與其他11人各打一場比賽。贏者得1分，輸者得0分，沒有平局。參賽者的最終得分分別為 $B_1, B_2, ..., B_{12}.$ 。求所有得分之和 $\Sigma_3 = B_1^3 + B_2^3 + ... + B_{12}^3$ 的最大可能值。

第四題

Find all positive integers x, y, z with z odd, which satisfy the equation:

$$2018^x = 100^y + 1918^z$$

第四題翻譯

找出所有正整數 x, y, z，其中 z 是奇數，滿足下列方程式：

$$2018^x = 100^y + 1918^z$$