數學解題方法
2017 Greece JBMO TST

第七組

411031209 謝燿璘　411031210 馬國凱
411031241 吳宗燁　411031245 廖登峰

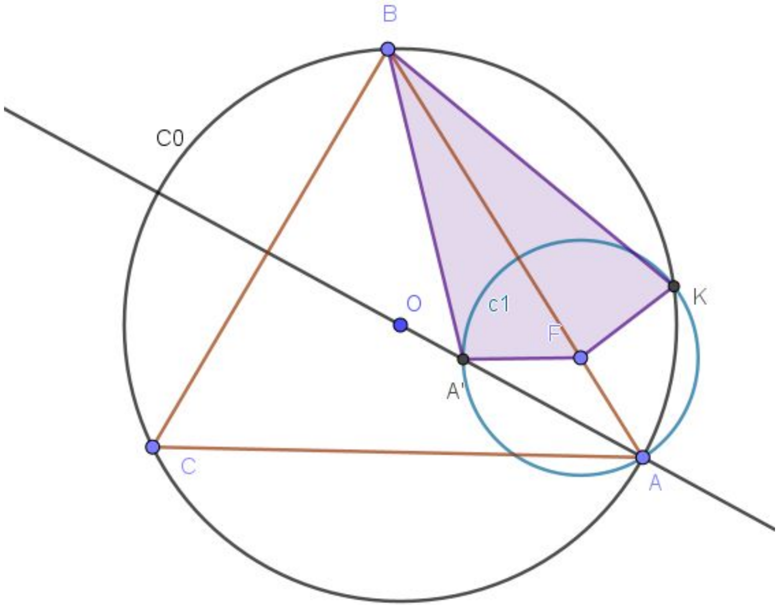
1

正實數a,b,c，滿足$a+b+c=1$。

證明$(a+1)*[\surd(2*a)*(1-a)] +(b+1)*[\surd(2*b)*(1-b)] +(c+1)*[\surd(2*c)*(1-c)] \geqq 8*(a*b+b*c+c*a)$。

若等式成立，則找出a,b,c的值

設銳角三角形ABC為圓C0的圓內接三角形，且點F為在邊AB上的點使得邊AF<邊AB/2。圓c1(F,FA)與線OA在點A'相交，與圓C0於點K相交。證明四邊形BKFA'為圓內接四邊形且此圓經過點O。



3

證明對於每個正整數 n, $A_n = 7^{2n} - 48n - 1$ 皆是 9 的倍數.

Proof:

$A_n = 7^{2n} - 48n - 1 = 49^n - 48n - 1$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_{n+1} = 49^{n+1} - 48(n+1) - 1 = 49 \cdot 49^n - 48n - 49 \\
&= 49(49^n - 48n - 1) + 48 \cdot 48n \\
&= 49\mathrm{A}_n + 48^2 n \\
&\equiv 4\mathrm{A}_n \pmod 9
\end{aligned}
$$

如果 A_n 是 9 的倍數, 則 A_{n+1} 亦是 9 的倍數.

$A_1 = 49^1 - 48(1) - 1 = 0$ 是 9 的倍數$\Rightarrow \mathrm{A}_n$ 皆是 9 的倍數.

相似題: 證明對於每個正整數 n, $B_n = 3^{3n} - 26n - 1$ 皆是 13 的倍數.

4

設 ABC 是邊長為 a 的等邊三角形，且 D、E、F 分別是邊 AB、BC、CA 的中點。設 H 是點 D 相對於邊 BC 的對稱點。將點 A、B、C、D、E、F、H中的每一個點上色，使用紅色或藍色。

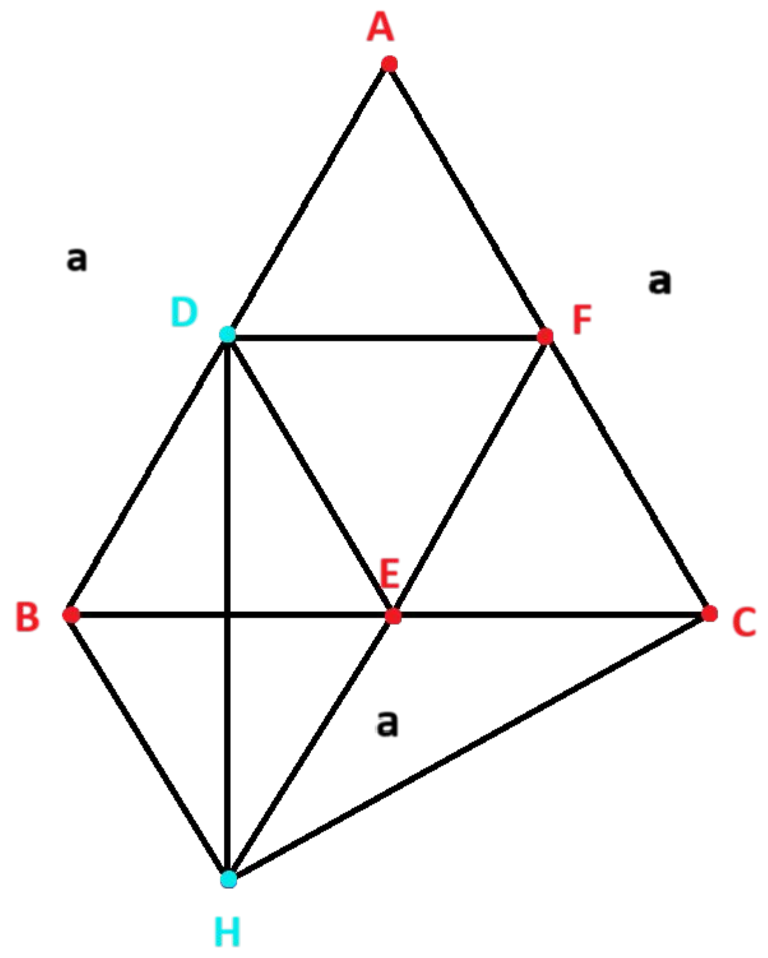
求在集合{A, B, C, D, E, F, H}中，有多少個等邊三角形，且所有頂點都位於這個集合中。

證明：如果點 B 和 E 被塗上相同顏色，那麼對於其餘點的任何上色，都存在一個等邊三角形，其頂點在集合 {A, B, C, D, E, F, H} 中，且這個三角形的顏色與 B 和 E 相同。

如果 B 是藍色，且 E 是紅色，那麼上述結論是否依然成立？

假設點 **B** 和 **E** 都是紅色的，那麼 **D** 和 **H** 必須是藍色的。這樣 **C** 必須是紅色的，然後 **A** 必須是藍色的。此時，點 **E** 和 **C** 是紅色的，點 **A** 和 **D** 是藍色的。如果我們將 **F** 塗成藍色，那麼三角形 **ECF** 是等邊三角形，且所有頂點顏色相同。如果我們將 **F** 塗成藍色，那麼三角形 **ADF** 也是等邊三角形，且所有頂點顏色相同。這就產生了矛盾！

結論 : 不成立。
如果 **B**、**D**、**F** 是藍色，且 **A**、**H**、**E**、**C** 是紅色的，那麼結論就不成立。


A
a
D
F
a
E
B
C
a
H

解答：
總共有 7 個三角形。

△ABC（原始大三角形）頂點A

△DEF（中點構成的內部小三角形）頂點F

△ADF 頂點D

△DBH（因為 H 是 D 對稱於 BC 的點）頂點B

△CEF 頂點C

△HEC 頂點E

△BEH 頂點H