數學解題方法

Group 8:

4108312O9李博勛
411231108張明耀
411231124黃昱程
411231140劉恆彬
411231220曾億守

Let $c \equiv c(O, R)$ be a circle with center O and radius R and A, B be two points on it, not belonging to the same diameter. The bisector of angle $\angle ABO$ intersects the circle c at point C, the circumcircle of the triangle AOB, say c_1 at point K and the circumcircle of the triangle AOC, say c_2 at point L. Prove that point K is the circumcircle of the triangle AOC and that point L is the incenter of the triangle AOB.

Evangelos Psychas (Greece)

設 c≡c(O,R)為以 O 為圓心、R 為半徑的圓，點 A,B 為圓上的兩點，且不在同一直徑上。角 ∠ABO 的角平分線與圓 c 相交於點 C。設 c1 為三角形 AOB 的外接圓，交於點 K，c2 為三角形 AOC的外接圓，交於點 L。

請證明：

- **點 K 是三角形 AOC的外接圓圓心，**
- **點 L 是三角形 AOB的內心。**

Positive integer n is such that number $n^2 - 9$ has exactly 6 positive divisors. Prove that GCD $(n-3, n+3) = 1$

正整數 n滿足條件：數字 n^2 - 9 恰好有 6 個正因數。
請證明 gcd(n−3,n+3)=1

Vaggelis has a box that contains 2015 white and 2015 black balls. In every step, he follows the procedure below:
He choses randomly two balls from the box. If they are both blacks, he paints one white and he keeps it in the box, and throw the other one out of the box. If they are both white, he keeps one in the box and throws the other out. If they are one white and one black, he throws the white out, and keeps the black in the box.
He continues this procedure, until three balls remain in the box. He then looks inside and he sees that there are balls of both colors. How many white balls does he see then, and how many black?

Vaggelis 有一個盒子，裡面有 2015 顆白球和 2015 顆黑球。
他按照以下步驟進行操作：

1. 他從盒子裡隨機抽出兩顆球：
   - 如果是兩顆黑球，他會將其中一顆塗成白色並放回盒子，另一顆丟掉。
   - 如果是一黑一白，他會丟掉白球，把黑球放回去。
   - 如果是兩顆白球，他會丟掉其中一顆，把另一顆放回去。
2. 他持續這樣進行，直到盒中只剩下三顆球。

最後他打開盒子，看到盒中仍有白球與黑球各至少一顆。
問題：他看到了多少顆白球？多少顆黑球？

a) Prove that, for any real $x > 0$, it is true that $x^3 - 3x \geq -2$.
b) Prove that, for any real $x, y, z > 0$, it is true that

$$\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} + 2\left(\frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} + \frac{x}{yz}\right) \geq 9$$

. When we have equality ?

a)對於任意實數 x>0，不等式成立：x^3−3x≥−2

b)對於任意實數 x,y,z>0，不等式成立：

(x^2 y)/z+(y^2 z)/x+(z^2 x)/y+2(y/xz+z/xy+x/yz)≥9

什麼時候等號成立？

第 1 題：

證明 $x^3 - 3x \geq -2$（對 $x>0$）

令函數 $f(x) = x^3 - 3x$

我們先對 $f(x)$ 做微分：

$f'(x)=3x^2-3$ 令 $f'(x)=0$ ，得 $x=\pm 1$

因為我們考慮的是 $x>0$，所以只看 $x=1$

當 $x=1$ 時：

$f(1)=1-3\cdot 1=-2$ 我們來看在 $x>0$ 的情況下，$f(x)\geq -2$ 是否成立：

- 當 $0<x<1$，$f'(x)<0$，函數遞減
- 當 $x>1$，$f'(x)>0$，函數遞增

因此，$x=1$ 是最小值點，且 $f(x)\geq -2$

第二題: $\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}+2\left(\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}+\frac{x}{yz}\right)\geq 9$

用 AM-GM（均方不等式）

令：

- **A=(x^2 y)/z, B=(y^2 z)/x, C=(z^2 x)/y**
- **D=y/xz, E=z/xy, F=x/yz**

A+B+C>=3(A+B+C)^1/3
D+E+F>=3(D+E+F)^1/3
2(D+E+F)>=6(D+E+F)^1/3

$$\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2y}{z}\cdot\frac{y^2z}{x}\cdot\frac{z^2x}{y}}=3\sqrt[3]{xyz}$$

$$2\left(\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}+\frac{x}{yz}\right)\geq 6\sqrt[3]{\frac{y}{xz}\cdot\frac{z}{xy}\cdot\frac{x}{yz}}=6\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$$

$$3\sqrt[3]{xyz}+6\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\geq 9$$

這個最小值在 x=y=z時取得，當 x=y=z=1 時成立

帶入驗證得

3+2*3=9

相似題

對任意正數 $x,y,z>1$，證明：

$$x^5/yz+y^5/zx+z^5/xy\geq x+y+z$$

x^5/yz+y^5/zx+z^5/xy≥x+y+z

$x, y, z > 1$

$$\frac{x^5}{yz} + \frac{y^5}{xz} + \frac{z^5}{xy} \geq x+y+z$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^6+y^6+z^6}{xyz} \geq x+y+z$$

$$\Rightarrow \quad x^6+y^6+z^6 \geq xyz(x+y+z)$$

AM-GM :

$$x^6+y^6+z^6 \geq 3\sqrt[3]{x^6+y^6+z^6} = 3(xyz)^2$$

$$xyz(x+y+z)$$

$$= 3xyz \cdot \frac{1}{3}(x+y+z) \leq 3xyz \cdot (xyz) \leq x^6+y^6+z^6$$

THANK YOU